GROUPE DE TRAVAIL: CORRESPONDANCE DE MCKAY

Résumé: Soient G est un sous-groupe fini de $\mathrm{SL_n}(\mathbb{C})$ (en général on considère $n \leq 3$) et Y est une résolution *crépante* (c'est à dire *minimale* en un certain sens) de la variété quotient $X = \mathbb{A}^n/G$. En gros, la correspondance de McKay est une série d'observations qui relient la théorie des représentations de G avec la géometrie de la variété Y (composantes irréductibles du lieu exceptionnel, (co)homologies, nombre d'Euler, catégorie dérivée, K-théorie, etc). Pour en savoir plus, je recommande la lecture de la première section du séminaire Bourbaki de Miles Reid [Rei02].

Dates et horaires des séances: Chaque semaine en salle 318.

- Jeudi 06/10/16, 14:15-15:45, Ronan.
- Jeudi 13/10/16, 14:15-15:45, Ronan.
- Jeudi 20/10/16, 14:15-15:45, Lucy.
- Jeudi 17/11/16, 14:15-15:45, Frédéric.
- Jeudi 15/12/16, 14:15-15:45, Frédéric.
- Jeudi 19/01/17, 14:15-15:45, Emmanuel.
- Jeudi 02/02/17, 14:15-15:45, Frédéric.
- Jeudi 09/02/17, 14:15-15:45, Frédéric.
- Jeudi 09/03/17, 14:15-15:45, Daniele.
- Jeudi 16/03/17, 14:15-15:45, Daniele.
- Jeudi 30/03/17, 14:15-15:45, Daniele.
- Jeudi 04/05/17, 14:15-15:45, Ronan.
- Jeudi 11/05/17, 14:15-15:45, Ronan.

Thèmes proposés:

(1) **Introduction.** Exposé général de présentation (basé sur [Rei02]). Correspondance de McKay classique [McK80] pour les sous-groupes finis de $\mathrm{SL_2}(\mathbb{C})$. Attribution des exposés.

(2) **Faisceaux de Gonzalez-Sprinberg et Verdier.** La première "preuve" d'un lien direct entre la théorie des représentations d'un sous-groupe fini G de $\mathrm{SL_2}(\mathbb{C})$ et la géométrie de la résolution crépante $Y \to X = \mathbb{A}^2/G$ fût obtenu par Gonzalez-Sprinberg et Verdier [GSV81, GSV83]. En effet, lorsque G est un sous-groupe de type D, ils ont construit des faisceaux $\mathcal{F}_\rho$ sur Y, où ρ parcourt l'ensemble (fini) des représentations irréductibles de G, tels que les premières classes de Chern $c_1(\mathcal{F}_\rho)$ forment une base de la K-théorie de Y.

(3) **Théorie des cordes.** La premier indice de l'existence d'une correspondance de McKay en dimension 3 (c'est-à-dire pour G un sous-groupe fini de $\mathrm{SL_3}(\mathbb{C})$) apparaît dans un papier écrit par les physiciens Dixon, Harvey, Vafa et Witten [DHVW85, DHVW86]. Si $G \subset \mathrm{SL_3}(\mathbb{C})$ et $Y \to X = \mathbb{A}^3/G$ est une résolution crépante, alors ils prouvent que la caractéristique d'Euler $\chi(Y)$ est égal au nombre de représentations irréductibles de G.

(4) **Sous-groupes finis de $\mathrm{SL_n}(\mathbb{C})$ lorsque $n \leq 3$.** Classifier les sous-groupes de $\mathrm{SL_n}(\mathbb{C})$ en petite dimension [Mit11, Blo67]. Aborder la théorie des représentations de ces sous-groupes

Date: March 11, 2017.

et l'existence de résolutions crépantes de la variété quotient $X = \mathbb{A}^n/G$.

(5) **Le G-schéma de Hilbert.** Si G est un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, alors il existe toujours une résolution crépante $Y \to X = \mathbb{A}^3/G$, mais celle-ci n'est pas unique en général. Le G-schéma de Hilbert, disons $\mathcal{H}$, a été construit par Ito et Nakamura [IN96, IN99] qui ont montré qu'en dimension 2 le morphisme de Hilbert-Chow $\mathcal{H} \to X$ est la résolution crépante de X. Dans [Nak01], Nakamura suggère qu'en dimension 3 le morphisme de Hilbert-Chow $\mathcal{H} \to X$ pourrait être encore une résolution crépante privilégiée (car canonique). Il faudrait expliquer la construction de $\mathcal{H}$, mentionner les résultats de Bridgeland, King et Reid [BKR01] pour $G \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ ainsi que le contre-exemple de Lehn et Sorger [LS12] lorsque $G(\subset \mathrm{SL}_4(\mathbb{C}))$ est le groupe tétrahédral binaire qui opère dans la somme directe de deux copies de la représentation standard.

(6) **Correspondance de McKay explicite via le A-schéma de Hilbert.** Dans [Nak01, CR02] est introduit un algorithme (basé sur des méthodes de géométrie torique) pour calculer le A-schéma de Hilbert lorsque A est un sous-groupe abélien fini de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$. Il s'agirait d'expliquer cette méthode, de calculer des exemples et aussi de raconter les principaux résultats obtenus par Craw dans [Cra05].

(7) **La correspondance de McKay comme transformée de Fourier-Mukai.** La transformé de Fourier-Mukai est une méthode générale pour construire des isomorphismes entre catégories dérivées. Bridgeland, King et Reid [BKR01] ont utilisé cet outil pour montrer que le G-schéma de Hilbert $\mathcal{H}$ est une résolution crépante de $X = \mathbb{A}^3/G$ lorsque G est un sous-groupe fini arbitraire de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$. De plus, ils ont montré $\mathcal{D}^G(\mathbb{A}^n) \cong \mathcal{D}(\mathcal{H})$ et un résultat analogue en K-théorie.

(8) **Géométrie birationnelle des résolutions crépantes de X.** Dans [CI04], Craw et Ishii introduisent un nouvel espace de module (dépendant d'un paramètre $\theta \in \mathbb{Q}^n$) qui généralise le G-schéma de Hilbert. Ils montrent que toutes les résolutions crépantes de $X = \mathbb{A}^3/G$, avec G un sous-groupe abélien fini de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, peuvent être obtenues ainsi et étudient la géométrie birationnelle de ces espaces lorsque le paramètre θ varie.

(9) **Correspondance de McKay non-commutative.** Dans [IU15], Ishii et Kazushi obtiennent une version (non-commutative) de la correspondance de McKay où G est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et Y est une résolution crépante non-commutative de $X = \mathbb{A}^2/G$.

(10) **Intégration motivique.** L'intégration motivique de Batyrev, Denef-Loeser et Kontsevich est un outil mathématique qui joue un rôle analogue en géométrie algébrique aux intégrales de chemin en théorie des champs quantiques. Cet outil permet de démontrer certaines prédictions de [DHVW85, DHVW86] et fournit une forme exacte de la correspondance de McKay homologique pour les sous-groupes finis de $\mathrm{SL_n}(\mathbb{C})$.

(11) **Correspondance de McKay quantique.** Dans [BG09], Bryan et Gholampour considèrent une version quantique de la correspondance de McKay. Si G est un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, ils obtiennent une formule explicite pour les invariants de Gromov-Witten de la résolution crépante Y de $X = \mathbb{A}^3/G$ en termes d'un certain système de racines associé au groupe G.

(12) **Théorie des valuations.** Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Dans [IR96], Ito et Reid montrent que G a une graduation naturelle par l'*âge*, analogue à la graduation par les poids en théorie de Hodge. Ils prouvent que les classes de conjugaison d'un élément junior $g \in G$ (élement d'âge 1) sont en correspondance avec les valuations discrètes associées aux composantes irréductibles du lieu exceptionnel d'une résolution crépante $Y \to X$. Ce résultat est valide pour tout $n \geq 2$ mais pour $n \geq 4$ ne permet de retrouver qu'une petite partie des phénomènes observés en dimension 3.

References

[BG09] Jim Bryan and Amin Gholampour. The quantum McKay correspondence for polyhedral singularities. *Invent. Math.*, 178(3):655–681, 2009.

[BKR01] Tom Bridgeland, Alastair King, and Miles Reid. The McKay correspondence as an equivalence of derived categories. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(3):535–554 (electronic), 2001.

[Blo67] David M. Bloom. The subgroups of PSL(3, q) for odd q. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 127:150–178, 1967.

[CI04] Alastair Craw and Akira Ishii. Flops of G-Hilb and equivalences of derived categories by variation of GIT quotient. *Duke Math. J.*, 124(2):259–307, 2004.

[CR02] Alastair Craw and Miles Reid. How to calculate A-Hilb $\mathbb{C}^3$. In *Geometry of toric varieties*, volume 6 of *Sémin. Congr.*, pages 129–154. Soc. Math. France, Paris, 2002.

[Cra05] Alastair Craw. An explicit construction of the McKay correspondence for A-Hilb $\mathbb{C}^3$. *J. Algebra*, 285(2):682–705, 2005.

[DHVW85] L. Dixon, J. A. Harvey, C. Vafa, and E. Witten. Strings on orbifolds. *Nuclear Phys. B*, 261(4):678–686, 1985.

[DHVW86] L. Dixon, J. Harvey, C. Vafa, and E. Witten. Strings on orbifolds. II. *Nuclear Phys. B*, 274(2):285–314, 1986.

[GSV81] Gerardo González-Sprinberg and Jean-Louis Verdier. Points doubles rationnels et représentations de groupes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 293(2):111–113, 1981.

[GSV83] G. Gonzalez-Sprinberg and J.-L. Verdier. Construction géométrique de la correspondance de McKay. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 16(3):409–449 (1984), 1983.

[IN96] Yukari Ito and Iku Nakamura. McKay correspondence and Hilbert schemes. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 72(7):135–138, 1996.

[IN99] Y. Ito and I. Nakamura. Hilbert schemes and simple singularities. In *New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996)*, volume 264 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 151–233. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[IR96] Yukari Ito and Miles Reid. The McKay correspondence for finite subgroups of $\mathrm{SL}(3, \mathbf{C})$. In *Higher-dimensional complex varieties (Trento, 1994)*, pages 221–240. de Gruyter, Berlin, 1996.

[IU15] Akira Ishii and Kazushi Ueda. The special McKay correspondence and exceptional collections. *Tohoku Math. J. (2)*, 67(4):585–609, 2015.

[LS12] Manfred Lehn and Christoph Sorger. A symplectic resolution for the binary tetrahedral group. In *Geometric methods in representation theory. II*, volume 24 of *Sémin. Congr.*, pages 429–435. Soc. Math. France, Paris, 2012.

[McK80] John McKay. Graphs, singularities, and finite groups. In *The Santa Cruz Conference on Finite Groups (Univ. California, Santa Cruz, Calif., 1979)*, volume 37 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 183–186. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980.

[Mit11] Howard H. Mitchell. Determination of the ordinary and modular ternary linear groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 12(2):207–242, 1911.

[Nak01] Iku Nakamura. Hilbert schemes of abelian group orbits. *J. Algebraic Geom.*, 10(4):757–779, 2001.

[Rei02] Miles Reid. La correspondance de McKay. *Astérisque*, (276):53–72, 2002. Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000.