Université de Bourgogne
Département de mathématiques
UFR Sciences et Techniques
Licence 3

L3 Projet

Séance 4: Introduction à l'utilisation du logiciel SageMath

SageMath est un logiciel libre de mathématiques sous licence GPL. Il combine la puissance de nombreux programmes libres dans une interface commune basée sur le langage de programmation Python.

Mission: Création d'une alternative viable libre et open source à Magma, Maple, Mathematica et Matlab.

SageMath permet de faire des mathématiques générales et avancées, pures et appliquées. Il couvre une vaste gamme de mathématiques, dont l'algèbre, l'analyse, la théorie des nombres, la cryptographie, l'analyse numérique, l'algèbre commutative, la théorie des groupes, la combinatoire, la théorie des graphes, l'algèbre linéaire formelle, etc ...

Exercice 1. Résoudre les équations suivantes:

$$1) \begin{cases} z = x^5 + y^5 \\ xy = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x^4 + y^4 = 1 \\ y^2 + 3x + x^3 = 2 \end{cases} \qquad 3) \begin{cases} z^2 + y^2 + x^2 = 1 \\ 7x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Dessiner les courbes et surfaces correspondant à chacune des sept équations ci-dessus.

Exercice 2.

1. Tracer le graphe de la fonction $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ sur $]0;1[$. Calculer les dérivées successives de f et en déduire une formule générale pour la dérivée n-ième $f^{(n)}$. Calculer une primitive de f puis la valeur de l'intégrale $I_{a,b} = \int_a^b f(x)dx$ en supposant $0 < a < b$.
2. Définir la fonction $g(x) = x^{\frac{1}{x}}$. Calculer $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ avec la commande *limit(g(x),x=0,dir='plus')*. Calculer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$. Tracer le graphe de la fonction g sur l'intervalle $]0;10[$. Calculer $g''(1)$.
3. Soit $h(x) = \sqrt{1 + x + \sqrt{1+x}} - \sqrt{1+x}$. Calculer $\lim_{x\to+\infty} h(x)$. Donner un développement limité de h en zéro.

Exercice 3. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} a-b-c \\ 2a \\ 2a \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2b \\ b-a-c \\ 2b \end{bmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{bmatrix} 2c \\ 2c \\ c-a-b \end{bmatrix}$$

où a, b, c sont trois nombres réels. Calculer le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ et simplifier son expression. En déduire que le parallélépipède engendré par ces trois vecteurs a le même volume que le cube de côté $|a + b + c|$.

Exercice 4. Résoudre le système d'équations différentielles d'ordre 2 suivant:

$$\begin{cases} x_1'' + 6x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2'' + 2(x_2 - x_1) = 0 \\ x_1(0) = 3, x_1'(0) = 0 \\ x_2(0) = 3, x_2'(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 5. Soient $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $P(X) = \sum_{i=0}^{20} X^i$. Déterminer la matrice $N_1 = P(M)$. Calculer le rang, la trace, le déterminant, les valeurs propres et le noyau de N_1. Faire de même avec la matrice $N_2 = e^M$. Faire de même avec une autre matrice de taille 3*3 dont les coefficients sont des entiers aléatoires.

Exercice 6. Déterminer le nombre de couples (p_1, p_2) de nombres premiers jumeaux plus petits que 10^4. Déterminer une relation de Bézout entre 523 et 881.

Exercice 7. Déterminer les extrema (locaux et globaux) de la fonction suivante:

$$f(x, y, z) = x(\ln(x)^2 + y^2) - ze^{-z}$$

Exercice 8. Définir $G = \Sigma_5$ le groupe des permutations de taille 5. Déterminer son cardinal, vérifier que G n'est pas abélien puis calculer son centre.