Université de Bourgogne
Département de mathématiques
UFR Sciences et Techniques
Licence 3

Feuille de TD n°2 : Étude locale des courbes dans l'espace

Exercice 1. Soit $a > 0$ fixé. Calculer la longueur L de l'arc paramétré

$$x(t) = \frac{cos(at)}{ch(t)},\ y(t) = \frac{sin(at)}{ch(t)},\ z(t) = th(t),\quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2. Reconnaître la courbe définie par le système d'équations polynomiales

$$\Gamma \quad \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{4}z = 0 \\ x^2 + xy + z^2 - \frac{1}{4}y = 0 \end{cases}$$

(Indication : L'annexe sur la classification des coniques peut être utile.)

Exercice 3. Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que la courbe suivante est une courbe plane :

$$\Gamma \quad \begin{cases} x(t) = \frac{1}{1+t^2}P(t) \\ y(t) = \frac{1}{1+t^2}Q(t) \\ z(t) = \frac{1}{1+t^2}R(t) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4. –

1. Soit $\Gamma_1 \subset \mathbb{R}^3$ une courbe gauche dont toutes les tangentes passent par un même point. Montrer que Γ_1 est une (portion de) droite.
2. Soit $\Gamma_2 \subset \mathbb{R}^3$ une courbe gauche telle que toutes les normales passent par un même point. Montrer que Γ_2 est une (portion de) cercle.

Exercice 5. La fenêtre de Viviani.

1. Montrer par un calcul de torsion que la courbe suivante n'est pas plane :

$$\Gamma \quad \begin{cases} x(t) = \cos^2(t) \\ y(t) = \cos(t)\sin(t) \\ z(t) = \sin(t) \end{cases}$$

2. Déterminer et tracer les projections orthogonales de Γ sur les trois plans $P_x = \{x = 0\}$, $P_y = \{y = 0\}$ et $P_z = \{z = 0\}$. En déduire l'allure de la courbe Γ dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer la courbure de Γ en tout point et la comparer avec la courbure des trois courbes planes obtenues par projection dans P_x, P_y et P_z.

Exercice 6. Calculer le repère de Frenet (c'est-à-dire les vecteurs $\{T, N, B\}$), la courbure κ et la torsion τ des courbes paramétrées suivantes :

1.
$$C_1 \quad \begin{cases} x(t) = \sqrt{1+t^2} \\ y(t) = t \\ z(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

2.
$$C_2 \quad \begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} \\ y(t) = \frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}} \\ z(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}t \end{cases} \qquad t \in]-1;1[$$

Ensuite, donner une équation cartésienne pour le plan osculateur, le plan rectificateur et le plan normal de C_1 au point $(1, 0, 0)$. Idem pour C_2 au point $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$.

Exercice 7. *Dans cet exercice on étudie un raccordement lisse et non plan de deux courbes planes de sorte que la torsion est identique à zéro sans que la courbe soit plane au voisinage de l'origine, point en lequel la courbure s'annule (ce n'est donc pas en contradiction avec la Remarque* 2.3 *du cours).*

Soit Γ la courbe définie par le paramétrage suivant :

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{\frac{-1}{t^2}}) & \text{si } t > 0 \\ (0,0,0) & \text{si } t = 0 \\ (t, e^{\frac{-1}{t^2}}, 0) & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la courbe Γ est régulière.
2. Montrer que $\kappa(t) \neq 0$ si $t \notin \{0; \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\}$ et vérifier que $\kappa(0) = 0$.
3. Montrer que l'application $t \mapsto N(t)$ n'admet pas de prolongement par continuité en $t = 0$.
4. Montrer que la torsion de Γ est nulle en tout point bien que Γ ne soit pas une courbe plane.

Exercice 8. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Montrer que la courbe gauche suivante est une hélice non-circulaire :

$$H \quad \begin{cases} x(t) = \alpha e^{-t}\cos(t) \\ y(t) = \alpha e^{-t}\sin(t) \\ z(t) = \alpha e^{-t}\cot(\alpha) \end{cases}$$

Puis déterminer une équation cartésienne du cône C_H sur lequel est tracée cette hélice.

Exercice 9.

1. Montrer que $SO(3)$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$ de dimension 3.
2. Montrer que l'espace tangent (vectoriel) à $SO(3)$ au point I_3 est l'espace vectoriel $\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices anti-symétriques.
3. Montrer que le commutateur de matrices $[U, V] = UV - VU$ définit un crochet de Lie sur $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
4. Construire un isomorphisme d'algèbres de Lie entre $(\mathcal{A}_3(\mathbb{R}), [-,-])$ et $(\mathbb{R}^3, \wedge)$.