Université de Bourgogne
Département de mathématiques
UFR Sciences et Techniques
Licence 3

Feuille de TD n°3 : Étude locale des surfaces dans l'espace (1/2)

Exercice 1. –

1. Justifier pourquoi toute sous-variété connexe de dimension 1 est localement le support d'une courbe régulière.
2. Donner un exemple de courbe régulière dont le support n'est pas un sous-variété de dimension 1.
3. Justifier pourquoi toute surface régulière est localement le support d'une nappe paramétrée.
4. Donner un exemple d'une nappe paramétrée dont le support n'est pas une surface régulière.

Exercice 2. Donner des exemples de polynômes de degré 2 dans $\mathbb{R}[X, Y, Z]$ qui réalisent tous les types de quadriques dégénérées mentionnées dans la section 3.2 du cours.

Exercice 3. –

1. Montrer que $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$(u, v) \mapsto \phi(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), u^4)$$
est une nappe paramétrée. Est-ce que cette nappe paramétrée est régulière ?
Donner une équation cartésienne de son support. Est-ce que son support est une surface régulière ?
2. Mêmes questions avec $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$(u, v) \mapsto \psi(u, v) = (u + v, u^2 + v^2, u^3 + v^3).$$

Exercice 4. Déterminer toutes les droites tracées sur la surface S d'équation :

1. $xy + yz + zx + xyz = 0$
2. $2x^3 - 3x^2y + z^2 = 0$

Exercice 5. On considère la nappe paramétrée $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$(u, v) \mapsto \phi(u, v) = (u + (e^u - 1)\cos(v), 2(e^u - 1)\cos(v), (1 - e^u)\sin(v)).$$
Montrer que son support S est une surface de révolution. (En particulier, on déterminera la courbe génératrice et l'axe de révolution.) Est-ce que S est une surface régulière ?

Exercice 6. Déterminer quelles quadriques sont des surfaces de révolution et/ou des surfaces réglées.

Exercice 7. Donner un exemple d'une surface réglée qui n'est pas une quadrique.

Exercice 8. On considère la nappe paramétrée $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$(u, v) \mapsto \phi(u, v) = (u + v^2, u^2 + v, uv).$$
Est-ce que le support S de ϕ est une surface régulière ?
Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à S en $P = (2, 2, 1)$.

Exercice 9. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent en $M = (1, 1, -1)$ à la surface S d'équation cartésienne
$$x^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3 - 1 = 0.$$

Exercice 10. Déterminer les plans tangents à la surface S d'équation $z^3 - xy = 0$ et contenant la droite D d'équation
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3z + 3 \end{cases}$$

Exercice 11. Montrer que les deux surfaces S_1 et S_2 définies par les équations
$$E_1 :\ x^3 + y^3 + z^3 = 18 \quad \text{et} \quad E_2 :\ xy + yz + xz = -7$$
sont transverses. Déterminer un vecteur tangent en $P = (-2, -1, 3)$ à la courbe $C = S_1 \cap S_2$.