Université de Bourgogne
Département de mathématiques
UFR Sciences et Techniques
Licence 3

Feuille de TD n°4 : Étude locale des surfaces dans l'espace (2/2)

Exercice 1. (**Paraboloïde hyperbolique**) Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. On considère la nappe paramétrée définie par

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ \ (u,v) \mapsto \phi(u,v) = (a(u+v), b(u-v), uv)\,.$$

Montrer que son support, connu sous le nom de *paraboloïde hyperbolique*, est une surface doublement réglée. Quelles sont les autres surfaces doublement réglées ?

Exercice 2. Calculer la première forme fondamentale en tout point de la sphère unité.
Indication : On rappelle qu'un paramétrage $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de la sphère unité est donné par

$$(u,v) \mapsto \phi(u,v) = (\sin(u)\cos(v), \sin(u)\sin(v), \cos(u)) \quad 0 \leq u, v < 2\pi.$$

Exercice 3. **(Surface hélicoïdale)** On fixe $a > 0$. On considère la nappe paramétrée $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$(u,v) \mapsto \phi(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), av) \quad 0 < v < 2\pi, \ u \in \mathbb{R}.$$

Montrer que le support S de ϕ est une surface régulière puis calculer sa première forme fondamentale.

Exercice 4. **(Géodésiques)** Une courbe $\alpha : I \to \mathbb{R}^3, \ t \mapsto \alpha(t)$ paramétrée par la longueur d'arc et dessinée sur une surface S est appelée une *géodésique* de S si $\alpha''(t)$ est un vecteur normal à S en $\alpha(t)$ pour tout $t \in I$.

1. Quelles sont les géodésiques d'une sphère ? d'un plan ? d'un cylindre ?
   (Et en déduire pourquoi les vols Paris–New-York survolent le Groenland !)
2. Montrer que les géodésiques sont les courbes qui minimisent la distance entre deux points de S.

Exercice 5. Soit $a > 0$. Déterminer les applications de Gauss du cylindre paramétré par

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (u,v) \mapsto \phi(u,v) = (a\cos(u), a\sin(u), v).$$

Exercice 6. Montrer que la *bande de Möbius* est une surface non-orientable.
Indication : Voire l'exemple 3.10 du cours.

Exercice 7. Calculer la seconde forme fondamentale et déterminer la nature des points (elliptique, hyperbolique, parabolique) du paraboloïde hyperbolique. Même question pour l'hyperboloïde à deux nappes.

Exercice 8. On considère la surface de révolution S obtenue en faisant "tourner" la courbe paramétrée $c : I \to \mathbb{R}^3, \ t \mapsto c(t) = (f(t), 0, h(t))$, contenue dans le plan $y = 0$, autours de l'axe Oz. On suppose que c est paramétrée par la longueur d'arc, c'est-à-dire que $f'(t)^2 + h'(t)^2 = 1$ pour tout $t \in I$. Un paramétrage de S est alors donné par

$$\phi : I \times [0; 2\pi[\to \mathbb{R}^3, \ (t,\theta) \mapsto \phi(t,\theta) = (f(t)\cos(\theta), f(t)\sin(\theta), h(t)).$$

1. Lorsque $f > 0$, montrer que la courbure de Gauss de S au point $\phi(t,\theta)$ est donnée par $K(t,\theta) = \frac{-f''(t)}{f(t)}$.
2. Calculer la courbure de Gauss en tout point du tore T obtenu en prenant $f(t) = 2 + cos(t)$ et $h(t) = \sin(t)$.
3. En déduire quels sont les points elliptique/hyperbolique/parabolique du tore.
4. Retrouver les résultats précédents en calculant la seconde forme fondamentale du tore T vu comme l'ensemble des zéros de l'équation cartésienne

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + y^2).$$

Exercice 9. Calculer la courbure de Gauss en tout point de l'ellipsoïde d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R}_+^*.$$

Exercice 10. Soit S une surface *compacte* de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe un point de S où la courbure est strictement positive.
Indication : On pourra fixer un point P de l'espace et montrer qu'en les points de S dont la distance à P est maximale, la courbure de S est strictement positive.