Algèbre linéaire et bilinéaire (LMo5E)

Feuille d'exercices n°1
— Réduction d'endomorphismes —

Dans cette liste d'exercices, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Exercice 1. Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables ou, à défaut, trigonalisables sur $\mathbb{R}$, et calculer une base de vecteurs propres lorsque celle-ci existe :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Lesquelles de ces matrices sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$?

Exercice 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice trigonalisable sur $\mathbb{R}$ et diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. (1) Calculer les valeurs propres de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

et en déduire que $M^4 = I_3$.

(2) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique complexe vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0.$$

En utilisant la question précédente, calculer u_n en fonction de u_0, u_1 et u_2.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et soit f un endomorphisme de E dont le rang est 1. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si sa trace est non-nulle.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et soit Q une partie de $\mathcal{L}(E)$. On suppose que tout sous-espace F de E stable par Q, i.e. vérifiant

$$\forall q \in Q, \ q(F) \subset F,$$

ne peut être que E ou $\{0\}$.

(1) Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que tout $g \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec tout élément de Q est nécessairement une homothétie.

(2) Que se passe-t-il pour le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$? (On distinguera le cas n pair du cas n impair.)

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et soit f un endomorphisme de E possédant n valeurs propres distinctes. Soit g un endomorphisme de E tel que $g \circ f = f \circ g$.

(1) Montrer que g est diagonalisable et qu'il existe une base de diagonalisation commune à f et g.

(2) Montrer que g s'exprime, de façon unique, comme combinaison linéaire de $\mathrm{id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1}$. (On pourra utiliser une matrice de Vandermonde.)

Exercice 7. Soit la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

(1) Calculer les valeurs propres de J.

(2) En utilisant l'Exercice 6, décrire les matrices qui commutent avec J.

(3) Calculer les valeurs propres de la *matrice circulante*

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & & c_{n-3} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{pmatrix}$$

et en déduire son déterminant.

Exercice 8. [CC 2017] Soit $B \in \mathcal{M}_6(\mathbb{C})$. On suppose que B admet deux valeurs propres distinctes $a, b \in \mathbb{C}$, et que son polynôme caractéristique est

$$\mathcal{X}_B = (X-a)^2(X-b)^4 \in \mathbb{C}[X].$$

Répondre aux questions suivantes *en apportant une brève justification* :

(1) Quel est le polynôme minimal de B si B est diagonalisable ?

(2) Quelles sont les différentes possibilités pour la forme réduite de Jordan de B si son polynôme minimal est $(X-a)^2(X-b)^4$?

(3) Quelles sont les différentes possibilités pour la forme réduite de Jordan de B si son polynôme minimal est $(X-a)^2(X-b)^2$?

(4) Quelles sont les dimensions des sous-espaces propres E_a et E_b si la forme réduite de Jordan de B est

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} ?$$

Exercice 9. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et soit f un endomorphisme nilpotent de E.

(1) Quel est le polynôme caractéristique de f ? Peut-on affirmer que f admet une réduction de Jordan ?

(2) Supposons que $n = 4$. Quelles sont les différentes possibilités pour la forme de Jordan réduite et le polynôme minimal de f ?

Exercice 10. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 6 et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant

$$(f^2 + f + \mathrm{id}_E) \circ (f - 2\,\mathrm{id}_E)^2 = 0, \quad (f - 2\,\mathrm{id}_E)^2 \neq 0, \quad (f - 2\,\mathrm{id}_E) \circ (f^2 + f + \mathrm{id}_E) \neq 0.$$

(1) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, quelles sont les différentes possibilités pour le polynôme minimal de f et pour le polynôme caractéristique de f ?

(2) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, quelles sont les formes réduites de Jordan possibles pour f ?

Exercice 11. Calculer le polynôme minimal des matrices suivantes, et déterminer leur réduction de Jordan (accompagnée d'une base de Jordan) si celle-ci existe :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique de A.
(2) Donner une base de chaque sous-espace propre de A.
(3) Calculer le polynôme minimal de A.
(4) Déterminer la réduction de Jordan de A, après avoir justifié que celle-ci existe.
(5) En déduire la décomposition de Dunford de A.

Exercice 13. [CC 2017] Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique de A. Quelles sont les valeurs propres de A ?
(2) Déterminer la dimension de chaque sous-espace propre de A.
(3) Après avoir justifié que A admet une décomposition de Jordan, déterminer sa forme réduite de Jordan. En déduire le polynôme minimal de A.
(4) Calculer une base de Jordan de A.
(5) Calculer la décomposition de Dunford de A.

Exercice 14. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie m, et soit

$$\|\cdot\| : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

une norme. Pour rappel, toutes les normes de $\mathcal{L}(E)$ sont équivalentes (puisque $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie). On supposera dans la suite que $\|\cdot\|$ est une *norme d'algèbre*, i.e.

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E), \quad \|u \circ v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

(1) Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que

$$f(u) = \sum_{n\geq 0} a_n u^n$$

converge dans $\mathcal{L}(E)$ pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u\| < R$.

(2) En déduire que l'*exponentielle*

$$\exp(u) := \sum_{n\geq 0} \frac{u^n}{n!} \in \mathcal{L}(E)$$

est bien définie pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$.

(3) Montrer que, si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ commutent, alors

$$\exp(u + v) = \exp(u) \circ \exp(v) = \exp(v) \circ \exp(u).$$

En déduire que $\exp(u)$ est un automorphisme pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$.

(4) Montrer que, pour tous $u, v \in \mathcal{L}(E)$, si u et v sont conjugués alors $\exp(u)$ et $\exp(v)$ sont conjugués.

(5) Montrer que, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant une décomposition de Dunford $u = d + n$, on a
$$\exp(u) = \delta \cdot (\mathrm{id}_E + \eta)$$
où $\delta \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable inversible, $\eta \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent et $\delta \circ \eta = \eta \circ \delta$. On précisera les valeurs propres de δ en fonction de celles de d ; on déterminera aussi l'indice de nilpotence de η en fonction de celui de n.

(6) Décrire l'ensemble des endomorphismes u de E tels que $\exp(u) = \mathrm{id}_E$. Donner des exemples non-triviaux de tels endomorphismes pour $E = \mathbb{K}^2$. (On distinguera le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ du cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.)

Exercice 15. D'après l'Exercice 14, on peut définir l'*exponentielle*
$$\exp(A) = \sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$$
de toute matrice $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$.

(1) Montrer que $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$ pour tout $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$.

(2) Supposant qu'une réduction de Jordan de A nous est donnée, expliquer comment calculer $\exp(tA)$ pour tout $t \in \mathbb{K}$ de façon effective.

(3) En utilisant l'Exercice 11, calculer $\exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{K}$ et
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16. Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

(1) On pose $c(t) := \exp(tA)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $c : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est différentiable et que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad c'(t) = \exp(tA) \cdot A.$$

(2) Soient $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système différentiel linéaire
$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_m'(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix},$$
et montrer qu'il admet une unique solution de conditions initiales $x_1(0) = z_1, \ldots, x_m(0) = z_m$.

(3) Que peut-on dire de cette unique solution si
$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$
est un vecteur propre de A ?

(4) En utilisant l'Exercice 12, résoudre le système différentiel
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & x_1(t) \\ x_2'(t) & = & 2x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + 2x_4(t) \\ x_3'(t) & = & 4x_3(t) + 3x_4(t) \\ x_4'(t) & = & -2x_3(t) - x_4(t) \end{array} \right.$$
et donner l'unique solution telle que $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 2$.

Exercice 17. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(1) Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que les matrices M et ${}^tM$ sont semblables.

(2) Que se passe-t-il pour le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?