Algèbre linéaire et bilinéaire (LMo5E)

Feuille d'exercices n°2
— Dualité et compléments sur les espaces vectoriels —

Dans cette liste d'exercices, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Exercice 1. Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et soient les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$f_1 = (1, 1, 1), \quad f_2 = (0, 1, 1), \quad f_3 = (0, 0, 1).$$

(1) Montrer que $f = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Soit f^* (resp., e^*) la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ duale de f (resp., de e). Calculer f^* dans la base e^*.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, et soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on pose

$$f_j = \sum_{i=j}^{n} e_i.$$

Après s'être assuré que $f = (f_1, \dots, f_n)$ est aussi une base de E, exprimer la base f^* duale de f dans la base e^* duale de e.

Exercice 3. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^3)^*$ les formes linéaires définies par

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + 2x_2 + x_3, \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1 + 3x_2 + 3x_3, \\ \varphi_3(x_1, x_2, x_3) &= 3x_1 + 7x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Après s'être assuré que $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$, déterminer la base f de $\mathbb{R}^3$ antéduale de φ (i.e., telle que $f^* = \varphi$).

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $E = \mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel constitué des polynômes de degré au plus n.

(1) Pour $a \in \mathbb{C}$, on définit $\varphi_a : E \to \mathbb{C}$ par $\varphi_a(P) = P(a)$. Montrer que $\varphi_a \in E^*$.

(2) Soient a_0, a_1,…, a_n des nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille $\varphi = (\varphi_{a_0}, \dots, \varphi_{a_n})$ est une base de E^* et déterminer sa base antéduale.

(3) Montrer qu'il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall P \in E, \int_0^1 P(t)\, dt = \lambda_0 P(a_0) + \cdots + \lambda_n P(a_n)$$

puis donner la valeur des λ_i sous la forme d'une intégrale.

Exercice 5. Soit $D = \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel constitué des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et soit E le sous-espace de D engendré par les fonctions e_1, e_2, e_3, e_4 où

$$e_1(x) := \sin(x),\ e_2(x) := \cos(x),\ e_3(x) := \sin(2x),\ e_4(x) := \cos(2x).$$

On note $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in E^*$ les formes linéaires définies par

$$\varphi_1(u) := u(0),\ \varphi_2(u) = u(\pi),\ \varphi_3(u) = u'(0),\ \varphi_4(u) = u'(\pi).$$

(1) Vérifier que $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de E.
(2) Montrer que $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est une base de E^*.
(3) Soit f la base de E antéduale de φ. Exprimer f dans la base e.
(4) Soit $\ell \in E^*$ définie par $\ell(u) = \int_0^\pi u(t)\, \mathrm{d}t$. Exprimer ℓ dans la base e^* et dans la base φ.

Exercice 6. [CC 2017] Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus 2. On note $e = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de E :

$$e_0 = 1, \quad e_1 = X, \quad e_2 = X^2,$$

et on note $e^* = (e_0^*, e_1^*, e_2^*)$ la base de E^* duale de e.

(1) On fixe trois réels $a_0 < a_1 < a_2$ et, pour chaque $i \in \{0, 1, 2\}$, on définit $\ell_i \in E^*$ par
$$\forall p \in E, \quad \ell_i(p) = p(a_i) \in \mathbb{R}.$$
Donner la matrice P de la famille $\ell = (\ell_0, \ell_1, \ell_2)$ dans la base e^*.
(2) Calculer $\det(P)$ et en déduire que ℓ est une base de E^*.
(3) Calculer la matrice P^{-1}.
(4) On définit $\varphi \in E^*$ par
$$\forall p \in E, \quad \varphi(p) = \int_{-1}^{1} p(t)\, \mathrm{d}t.$$
Exprimer φ dans la base e^*, puis dans la base ℓ.
(5) Soit $F = \{p \in E : p(a_1) = p(a_2) = 0\}$. Calculer la dimension du sous-espace $F^\perp$ de E^*, et donner une base de $F^\perp$. *(On pourra raisonner avec la base de E antéduale de ℓ, qu'il ne sera pas la peine de calculer.)*

Exercice 7. Soit $E = \mathbb{R}^4$ et soit F le sous-espace de E engendré par les vecteurs

$$(1, 1, 1, 1),\ (-1, 1, -2, 2),\ (-1, 5, -4, 8),\ (-3, 1, -5, 3).$$

(1) Quelles sont les dimensions de F et de $F^\perp$, l'orthogonal de F dans E^* ?
(2) Déterminer une base de $F^\perp$ qu'on exprimera dans la base de E^* duale de la base canonique.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, et soit e une base de E dont la base duale est notée e^*. Comparer e à la base e^{**} de E^{**} duale de e^*.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et soient F, G des sous-espaces de E. Montrer les propriétés suivantes au sujet des orthogonaux dans E^* :

(1) $F \subset G$ entraîne $G^\perp \subset F^\perp$;
(2) $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$;
(3) $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$;
(4) $E = F \oplus G$ entraîne $E^* = F^\perp \oplus G^\perp$ et, alors, $F^\perp$ est canoniquement isomorphe à G^*.

En supposant que E est de dimension finie, montrer que $(F^\perp)^\perp$ s'identifie à F via l'isomorphisme canonique entre E^{**} et E.

Exercice 10. Soient E, F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires de E vers F.

(1) Vérifier que, pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$, l'application ${}^t u : F^* \to E^*$ définie par ${}^t u(\ell) = \ell \circ u$ est linéaire.

(2) Vérifier que l'application ${}^t(\cdot) : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(F^*, E^*)$ est linéaire.

(3) Montrer que, pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\text{inj. canon.}"'] & F \arrow[d, "\text{inj. canon.}"] \\ E^{**} \arrow[r, "{}^t({}^t u)"] & F^{**} \end{tikzcd}$$

(4) On suppose E et F de dimension finie, et soit e (resp., f) une base de E (resp., de F). Pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$, montrer l'égalité suivante entre les représentations matricielles de u et ${}^t u$:

$$M_{f^*,e^*}\big({}^t u\big) = {}^t\big(M_{e,f}(u)\big)$$

Exercice 11. Montrer que toute application linéaire surjective $u : E \to F$ entre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels permet d'identifier F à un espace quotient de E. Dans la liste suivante, justifier ainsi (en trouvant une application u appropriée) que chaque espace vectoriel F est un quotient de l'espace vectoriel E :

E	F
$\mathbb{K}_n[X]$, espace des polynômes de deg. $\leq n$	$\mathbb{K}_n^h[X]$, espace des polynômes *homogènes* de deg. n
$\mathrm{Map}(\mathbb{K},\mathbb{K})$, espace des applications $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$	$\mathrm{Map}^i(\mathbb{K},\mathbb{K})$, espace des applications *impaires* $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$
$\mathrm{Mat}_N(\mathbb{K})$, espace des matrices $N \times N$	$\mathrm{Mat}_N^+(\mathbb{K})$, espace des matrices *triangulaires sup.* $N \times N$
$\mathrm{Mat}_N(\mathbb{K})$, espace des matrices $N \times N$	$\mathbb{K}$, le corps scalaire

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, et soit u un endomorphisme de E. Après avoir remarqué que

$$\{0\} = \ker(u^0) \subset \ker(u) \subset \cdots \subset \ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1}) \subset \cdots \subset E$$

montrer que la suite $(d_n)_{n\geq 1}$ définie par $d_n = \dim(\ker(u^{n+1})) - \dim(\ker(u^n))$ est décroissante.

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, soit F un sous-espace de E et notons $p : E \to E/F$ la projection canonique.

(1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u(F) \subset F$. Montrer qu'il existe un unique $\tilde{u} \in \mathcal{L}(E/F)$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "u"'] & E/F \arrow[d, "\tilde{u}"] \\ E \arrow[r, "p"] & E/F \end{tikzcd}$$

(2) Est-il vrai que $u = \mathrm{id}_E$ équivaut à ce que ($u|_F = \mathrm{id}_F$ et $\tilde{u} = \mathrm{id}_{E/F}$) ? (Justifier.)

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et soient F, G des sous-espaces de E. Montrer qu'il existe un isomorphisme canonique

(1) entre $(E/G)/(F/G)$ et E/F, sous l'hypothèse où $G \subset F$,

(2) entre $F/(F \cap G)$ et $(F+G)/G$.

Exercice 15. [CC 2017] Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient F, G des sous-espaces de E. Pour tout sous-espace V de E et pour tout $x \in E$, on notera

$$[x]_V \in E/V$$

la classe d'équivalence de x modulo V. On considère alors l'application

$$\begin{cases} E/F \times E/G & \xrightarrow{\psi} & E/(F+G) \\ ([x]_F, [y]_G) & \longmapsto & [x-y]_{F+G} \end{cases}$$

où $F + G$ désigne le sous-espace de E constitué de tous les vecteurs $f + g$ pour $f \in F$ et $g \in G$.

(1) Vérifier que l'application ψ est bien définie et qu'elle est $\mathbb{K}$-linéaire.

(2) L'application ψ est-elle surjective ? *(Justifier votre réponse.)*

(3) Déterminer le noyau de ψ.

Exercice 16. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. La *codimension* d'un sous-espace F de E est

$$\operatorname{codim}_E(F) := \dim(E/F) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

(1) Montrer que ($\dim(E) = \infty$ et $\dim(F) < \infty$) entraîne $\operatorname{codim}_E(F) = \infty$.

(2) Peut-on avoir $\dim(E) = \dim(F) = \infty$ avec $F \subsetneq E$ tout en ayant $\operatorname{codim}_E(F) < \infty$? (Justifier.)

(3) Montrer que, pour tous sous-espaces F, G de E tels que $G \subset F$, on a
$$\operatorname{codim}_E(G) = \operatorname{codim}_E(F) + \operatorname{codim}_F(G).$$

(4) Montrer que, pour tous sous-espaces F, G de E, on a
$$\operatorname{codim}_E(F+G) + \operatorname{codim}_E(F \cap G) = \operatorname{codim}_E(F) + \operatorname{codim}_E(G).$$