Algèbre linéaire et bilinéaire (LMo5E)

Feuille d'exercices n°3
— Espaces hermitiens —

On notera $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ le produit scalaire hermitien usuel de $\mathbb{C}^n$, défini par

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n,\ \forall y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, \quad \langle x \,|\, y \rangle = \overline{x_1}\, y_1 + \cdots + \overline{x_n}\, y_n = \overline{{}^t x}\, y,$$

et on notera $\|\cdot\|$ la norme associée.

Exercice 1. Pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note

$$\varphi(A,B) = \operatorname{tr}\left(\overline{{}^t A} B\right).$$

(1) Montrer que $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ est un produit scalaire hermitien.

(2) Justifier que $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ avec

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix},\ f_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, et donner la matrice de φ dans la base f.

Exercice 2. Pour tous $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$, on note

$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} \overline{P(x)}\, Q(-x)\, \mathrm{d}x.$$

(1) Montrer que $\varphi : \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}$ est une forme hermitienne.

(2) Justifier que φ n'est pas définie positive.

Exercice 3. Déterminer toutes les matrices unitaires $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit $(E, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle)$ un espace hermitien. Pour tous $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in E \oplus E$, on note

$$\varphi(x,y) = \langle x_1 \,|\, y_1 \rangle + \langle x_2 \,|\, y_2 \rangle \in \mathbb{C}.$$

(1) Montrer que $\varphi : E^2 \times E^2 \to \mathbb{C}$ est un produit scalaire hermitien sur $E^2 = E \oplus E$.

(2) Montrer que l'application

$$\left\{ \begin{array}{rcl} E^2 & \xrightarrow{u} & E^2 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & (-x_2, x_1) \end{array} \right.$$

est un endomorphisme unitaire.

(3) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que le graphe de f

$$\Gamma_f = \big\{(e, f(e)) \,|\, e \in E\big\} \ \subset E^2$$

est l'orthogonal de $u(\Gamma_{f^*})$, où Γ_{f^*} désigne le graphe de l'adjoint de f.

Exercice 5. Soit $(E, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle)$ un espace hermitien, et soit u un endomorphisme unitaire de E. On pose $v := \mathrm{id}_E - u$.

(1) Montrer que $\ker(v)$ est l'orthogonal de $v(E)$.

(2) Soit $x \in E$ et soit x' la projection orthogonale de x sur $\ker(v)$. Montrer qu'il existe $y \in E$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{p=0}^{k-1} u^p(x) = kx' + y - u^k(y).$$

(3) En déduire que, pour tout $x \in E$, la projection orthogonale de x sur $\ker(v)$ est

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \sum_{p=0}^{k-1} u^p(x).$$

Exercice 6. On note

$$\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) = \big\{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \overline{{}^tH} = H\big\}$$

l'ensemble des matrice hermitiennes, et

$$\widetilde{\mathrm{U}}_n(\mathbb{C}) = \big\{P \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) : \det(P + I) \neq 0\big\}$$

l'ensemble des matrices unitaires n'admettant pas (-1) pour valeur propre.

(1) Montrer que, pour tout $H \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, la matrice $iI + H$ est inversible.

(2) Montrer que, pour tout $H \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, la matrice $P := (iI - H)(iI + H)^{-1}$ appartient à $\widetilde{\mathrm{U}}_n(\mathbb{C})$.

(3) Il découle de (1) et (2) que l'application

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) & \overset{\varphi}{\longrightarrow} & \widetilde{\mathrm{U}}_n(\mathbb{C}) \\ H & \longmapsto & (iI - H)(iI + H)^{-1} \end{array} \right.$$

est bien définie. Quelle est cette application lorsque $n = 1$?

(4) Montrer que l'application φ est bijective.

Exercice 7. On se propose de montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de vecteurs colonnes $M_1, \dots, M_n \in \mathbb{C}^n$, on a

$$(\mathcal{H}) \qquad |\det(M)| \leq \|M_1\| \cdots \|M_n\|$$

(1) Montrer $(\mathcal{H})$ lorsque M n'est pas inversible.

(2) Montrer $(\mathcal{H})$ lorsque M est unitaire.

(3) Montrer $(\mathcal{H})$ lorsque M est inversible.

Exercice 8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que, en tant que matrice à coefficients complexes, A est diagonalisable dans une base orthonormée de $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et que ses valeurs propres sont de la forme

$$e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_p}, e^{-i\theta_p}, \underbrace{1, \dots, 1}_{r}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{s}$$

où $p, r, s \in \mathbb{N}$, $\theta_1, \dots, \theta_p \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, et $2p + r + s = n$.

(2) Justifier que la base de vecteurs propres de A donnée par (1) peut être choisie sous la forme

$$(w_1, \overline{w_1}, \dots, w_p, \overline{w_p}, u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s)$$

où $w_1, \dots, w_p \in \mathbb{C}^n$ et $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s \in \mathbb{R}^n$.

(3) On pose alors

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad w'_{2j-1} = \frac{w_j + \overline{w_j}}{\sqrt{2}}, \quad w'_{2j} = \frac{i(w_j - \overline{w_j})}{\sqrt{2}}.$$

Justifier que $(w'_1, w'_2, \dots, w'_{2p-1}, w'_{2p},\ u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

(4) Montrer que la matrice de l'endomorphisme

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & A \cdot x \end{array} \right.$$

dans la base $(w'_1, w'_2, \dots, w'_{2p-1}, w'_{2p},\ u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s)$ est

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{matrix}} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \cos\theta_p & -\sin\theta_p \\ \sin\theta_p & \cos\theta_p \end{matrix}} & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}} & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$