Algèbre linéaire et bilinéaire (LMo5E)

Feuille d'exercices n°4
— Formes bilinéaires et quadratiques —

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f\big((x,y),(x',y')\big) = 2xx' + 3xy' + 3yx' - yy'.$$

(1) Vérifier que f est une forme bilinéaire symétrique, et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

(2) Préciser la forme quadratique q associée à f, et rappeler comment retrouver f à partir de q.

Exercice 2. Soit la forme bilinéaire $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f\big((x,y,z),(x',y',z')\big) = xx' + yy' + 3zz' + 6xz' + 2yx' - 3yz' + 3zx' + zy'.$$

(1) Donner la matrice de f dans la base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

(2) Calculer le rang, et les noyaux à gauche/droite de f.

(3) Soit b la base de $\mathbb{R}^3$ donnée par
$$b_1 = (1,1,1),\ b_2 = (0,1,1),\ b_3 = (0,0,1).$$
Donner la matrice de f dans b en utilisant la question (1).

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, et soit $Q : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$Q(f) = \int_{-1}^{+1} \big(f(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x.$$

(1) Montrer que Q est une forme quadratique, dont on donnera la forme polaire et la matrice dans la base canonique de E.

(2) Montrer que Q est positive. Est-elle dégénérée ?

Exercice 4. Réduire chaque forme quadratique ci-dessous en somme de carrés de formes linéairement indépendantes, puis en déduire le rang, la signature et le noyau :

(1) $q_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 4(xy + yz + xz)$;

(2) $q_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto xy + yz + xz$;

(3) $q_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ (x,y,z,t) \mapsto (x+y+z)^2 - 2y^2 + (y+z)^2$;

(4) $q_4 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ (x,y,z,t) \mapsto \frac{1}{2}(x+y+z+t)^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}t^2$.

Exercice 5. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par $q(x,y,z) = 5xy + 6xz + 2yz$.

(1) Donner la forme polaire de q et sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(2) Réduire q en somme de carrés de formes linéairement indépendantes, et en déduire la signature de q.

(3) Déterminer une base orthogonale de q et donner la matrice de q dans cette base.

(4) Calculer le cône isotrope de q.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit u une forme linéaire non-nulle sur E. On considère l'application

$$\begin{cases} E & \xrightarrow{q} & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & u(x)^2. \end{cases}$$

(1) Vérifier que q est une forme quadratique sur E et préciser sa forme polaire φ.

(2) Démontrer que le noyau de q est le noyau de la forme linéaire u. En déduire le rang de q.

(3) Pour $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $q(A) = \mathrm{tr}(A)^2$, calculer la matrice de q dans la base canonique $e = (e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$ de E et vérifier sur cet exemple les résultats de (2).

(4) Soit r une forme quadratique de rang un sur E. Démontrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et une forme linéaire non-nulle v sur E tels que pour tout $x \in E$ on ait $r(x) = \ell \cdot v(x)^2$. Comment peut-on choisir ℓ suivant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$?

Exercice 7. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $q : E \to \mathbb{K}$ une forme quadratique, et soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ sa forme polaire. On rappelle que l'*orthogonal* d'un sous-espace F de E est

$$F^\perp = \big\{e \in E : \forall f \in F,\ \varphi(e, f) = 0\big\}.$$

(1) Montrer que $\dim(F) + \dim(F^\perp) - \dim\big(F \cap N(q)\big) = n$.

(2) Montrer que $F^{\perp\perp} = F + N(q)$.

(3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur F pour que $E = F \oplus F^\perp$.

Exercice 8. Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et soit $q : E \to \mathbb{C}$ l'application définie par $q(A) = \det(A)$.

(1) Montrer que q est une forme quadratique, dont on déterminera la forme polaire.

(2) Réduire q en somme de carrés de formes linéairement indépendantes. Quel est le rang de q ?

(3) Donner une base de

$$F = \big\{A \in E : \mathrm{tr}(A) = 0\big\}$$

et calculer l'orthogonal $F^\perp$. Justifier que $E = F \oplus F^\perp$.

(4) Trouver un sous-espace G de E pour lequel $E \neq G \oplus G^\perp$.

Exercice 9. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$. On rappelle que le *groupe orthogonal* de q est

$$O(q) = \big\{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\ :\ \forall x \in \mathbb{R}^3,\ q(A \cdot x) = q(x)\big\}.$$

(1) Montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in O(q).$$

(2) Trouver un vecteur non-nul $v \in \mathbb{N}^3$ isotrope pour q.

(3) Donner une méthode pour construire à partir de v une infinité de *triplets pythagoriciens*, i.e. de solutions entières à l'équation $x^2 = y^2 + z^2$.

Exercice 10. Pour chaque forme quadratique ci-dessous, déterminer une base orthogonale qui soit aussi orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$:

(1) $q_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 4(xy + yz + xz)$;

(2) $q_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto 3x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xz$;

(3) $q_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 4xy + 2xz - 8yz$;

(4) $q_4 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ (x, y, z, t) \mapsto xy + xz + xt + yz + yt + zt$.

Exercice 11. Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension finie m, et soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique de signature (p, n).

(1) Montrer qu'il existe une base orthonormée $e = (e_1, \ldots, e_m)$ de $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ainsi que des constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{p+n} \in \mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\forall x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}, \quad q\Big(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_{p+i}\, x_{p+i}^2.$$

(2) Montrer que si q est définie positive, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall y \in E, \quad q(y) \geq \lambda \langle y \mid y \rangle.$$

Qu'en déduit-on concernant les normes de E qui sont issues de produits scalaires ?

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une forme bilinéaire $\omega : E \times E \to \mathbb{K}$ est dite *antisymétrique* lorsque $\omega(x, x) = 0$ pour tout $x \in E$.

(1) Soit ω une forme bilinéaire sur E, et soit e une base de E. Démontrer l'équivalence entre les assertions suivantes :
(i) ω est antisymétrique ;
(ii) $(\ \forall x, y \in E,\ \omega(x, y) = -\omega(y, x)\ )$;
(iii) la matrice de ω dans la base e est antisymétrique.

(2) Soit ω une forme bilinéaire antisymétrique sur E. On suppose $n \in \{1, 2\}$.
(a) Dans le cas où $n = 1$, montrer que ω est nulle.
(b) Dans le cas où $n = 2$ et où w est non-nulle, démontrer qu'il existe une base $e = (e_1, e_2)$ de E dans laquelle la matrice de ω est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Soit ω une forme bilinéaire antisymétrique non-nulle sur E. On suppose $n > 2$.
(a) Trouver deux vecteurs linéairement indépendants e_1 et e_2 de E tels que, pour $F := \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, la matrice de $\omega|_{F \times F}$ dans la base (e_1, e_2) soit J.
(b) Démontrer que $E = F \oplus F^\perp$, où

$$F^\perp = \big\{x \in E\ :\ \forall y \in F,\ \omega(x, y) = 0\big\}.$$

(c) En déduire, par récurrence sur n, l'existence d'une base e de E dans laquelle la matrice de ω est diagonale par blocs de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} J & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & J & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$