Fiche 1 : Exercices MA1 – Algèbre 2
2018

<u>Exercice 1</u> : Soient s_1, s_2, s_3, s_4 les sommets d'un tétraèdre régulier centré à l'origine de $\mathbf{R}^3$.

(a) Montrer que pour chaque pair de sommets (s_i, s_j), il existe une réflexion de $\mathbf{R}^3$ qui échange s_i et s_j, et qui laisse fixés les deux autres sommets.

(b) En déduire qu'il existe une représentation du groupe de permutations S_4 dans $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^3)$ qui induit l'opération de permutations des sommets du tétraèdre.

(c) Existe-t-il un sous-espace vectoriel invariant non trivial (c'est-à-dire autre que $\{0\}$ et $\mathbf{R}^3$) ?

<u>Exercice 2</u> : Soit C_n un groupe cyclique d'ordre n engendré par η.

(a) Soient H un groupe et $h \in H$. Montrer qu'il existe un homomorphisme de groupes $\varphi : C_n \to H$ tel que $\varphi(\eta) = h$ si et seulement si $h^n = e_H$. Si φ existe, montrer qu'il est unique. En particulier, si $f \in \mathrm{GL}(V)$ est un automorphisme de l'espace vectoriel V, il existe une unique représentation $\rho : C_n \to \mathrm{GL}(V)$ tel que $\rho(\eta) = f$ si et seulement $f^n = id$.

(b) Soient f_1, f_2 deux automorphismes tels que $f_1^n = f_2^n = id$. Soient ρ_i la représentation de C_n telle que $\rho_i(\eta) = f_i$, $i = 1, 2$. Montrer que ρ_1 est équivalente à ρ_2 si et seulement si il existe un automorphisme $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ tel que $\varphi \circ f_1 \circ \varphi^{-1} = f_2$.

<u>Exercice 3</u> : . Soit D_{2n} le groupe dièdral à $2n$ éléments, engendré par une rotation r d'ordre n, et une reflexion s.

(a) Soient H un groupe, et $h, k \in H$. Montrer qu'il existe un homomorphisme de groupes $\varphi : D_{2n} \to H$ tel que $\varphi(r) = h$ et $\varphi(s) = k$ si et seulement si $h^n = k^2 = (hk)^2 = e_H$. Si φ existe, montrer qu'il est unique.

(b) Soit C_n le sous-groupe engendré par r. Il est cyclique d'ordre n. Soient K un corps, et V un K-espace vectoriel. Si $\rho\colon C_n \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation linéaire, montrer qu'il existe une représentation linéaire $\hat{\rho}\colon D_{2n} \to \mathrm{GL}(V \times V)$ telle que $\hat{\rho}(r)(u, v) = (\rho(r)(u), \rho(r^{-1})(v))$ et $\hat{\rho}(s)(u, v) = (v, u)$.

<u>Exercice 4</u> :

(a) Soient $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation et $\theta\colon G \to K^\times$ est un homomorphisme de groupes. Montrer que $\rho' : G \to \mathrm{GL}(V)$ défini par $\rho'(g) = \theta(g)\rho(g)$ est une représentation.

(b) Montrer qu'il existe un unique homomorphisme de groupes $\theta : D_{2n} \to \mathbf{R}^\times$ tel que $r \mapsto 1$, $s \mapsto -1$.

(c) Soit ρ la représentation de D_{2n} sur $\mathbf{R}^2$ telle que $\rho(r)$ est la rotation d'angle $2\pi/n$ est $\rho(s)$ est la réflexion orthogonale qui fixe l'axe vertical. Est-ce que ρ' est équivalente à ρ ?

<u>Exercice 5</u> : Soit $\rho : G \to GL_n(\mathbf{K})$ une représentation matricielle. Montrer que $\theta : G \to GL_1(\mathbf{K}) = \mathbf{K}^\times$ donné par $\theta(g) = \det(\rho(g))$ est une représentation de degré 1.

<u>Exercice 6</u> : Soit C_2 le groupe cyclique d'ordre deux engendré par l'élément η. Montrer qu'il existe une représentation matricielle ρ de C_2 de degré 2 telle que $\rho(\eta) = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Est-elle équivalente à la représentation ρ' donnée par $\rho'(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

Exercice 7 : Soit C_3 le groupe cyclique d'ordre 3. Soit η un générateur de C_3, et soit $\mathbf{K}$ le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On fixe deux matrices A et B de $GL_3(\mathbf{K})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer qu'il existe deux représentations ρ_A et ρ_B de C_3 de degré 3 avec $\rho_A(\eta) = A$ et $\rho_B(\eta) = B$.
(b) Trouver un vecteur $v \in \mathbf{K}^3$ tel que (v, Bv, B^2v) forme une base de $\mathbf{K}^3$.
(c) Montrer que ρ_A et ρ_B sont équivalentes.
(d) Trouver un vecteur $u \in \mathbf{K}^3$ tel que $Au = u$. Soit $w = {}^t(1, -1, 0)$. Montrer que (u, w, Aw) forme une base de $\mathbf{K}^3$.
(e) Décomposer la représentation ρ_A en deux représentations, une de degré 1, l'autre de degré 2.
(f) Est-ce que la représentation ρ_A est équivalente à la somme de trois représentations de degré 1 ? (Indication : la réponse dépend du choix de $\mathbf{K}$.)

Exercice 8 : Soit C_n le groupe cyclique d'ordre n. On considère la représentation $\rho : C_n \to GL_2(\mathbf{C})$ donnée par :

$$\rho(\eta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix} = A.$$

(a) Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs propres de A.
(b) Montrer que ρ est équivalente à la somme de deux représentations de degré 1. Lesquelles ?

Exercice 9 : Soit $\mathbf{K}^G$ l'espace vectoriel d'applications $\phi : G \to K$.
(a) Montrer que $\rho : G \to \mathrm{GL}(\mathbf{K}^G)$ donné par $\rho(g)(\phi)(h) = \phi(hg)$ pour $g, h \in G$ et $\phi \in \mathbf{K}^G$ est une représentation de G.
(b) Montrer que cette représentation est équivalente à la représentation régulière de G.
(c) Soit G un groupe fini, et V le $\mathbf{K}$-espace vectoriel de base $\{e_g\}_{g \in G}$. Soit $\rho' : G \to \mathrm{GL}(V)$ l'application donnée par $\rho'(g)e_h = e_{gh}$. Montrer que ρ' est une représentation, et puis que cette représentation est équivalente à la représentation régulière.
(d) Montrer que la représentation régulière est fidèle.

Exercice 10 : Montrer qu'une représentation fidèle d'un groupe non abélien n'est jamais la somme de représentations de degré 1.