Fiche 2 : Exercices MA1 – Algèbre 2
2018

Exercice 1 : Trouver toutes les représentations matricielles de degré 1 du groupe des quaternions Q_8.

Exercice 2 : On considère la représentation de S_4 trouvée dans Exercice 1 de la Fiche 1.

(a) Déterminer la représentation matricielle de cette représentation par rapport à la base (s_1, s_2, s_3) de $\mathbf{R}^3$. (Déterminer d'abord le sommet $s_4 \in \mathbf{R}^3$ par rapport à cette base.)

(b) Montrer que la représentation de permutations de S_4 dans $\mathbf{R}^4$ a une sous-représentation $V = \{({}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + \cdots + x_4 = 0\}$. Montrer qu'elle est équivalente à la représentation trouvée dans l' Exercice 1 de la Fiche 1.

Exercice 3 :

(a) Trouver toutes les représentations matricielles de degré 1 du groupe cyclique C_n à n éléments.

(b) Soit η un générateur du groupe C_n. Soit $\{f_0, \ldots, f_{n-1}\}$ le sous ensemble de l'espace vectoriel K^G, où $f_k(\eta^j) = 1$ si $j = k$ et 0 si $j \neq k$ $(0 \leq j, k \leq n-1)$. Montrer que ces applications forment une base de K^G.

(c) Soit $\rho : C_n \to GL_n(K)$ la représentation matricielle de la représentation régulière du groupe cyclique par rapport à cette base. Expliciter la matrice $A = \rho(\eta)$.

(d) Déterminer les vecteurs propres et valeurs propres de la matrice A.

(e) Trouver tous les sous-espaces invariants de dimension 1 de la représentation régulière de C_n. ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.)

(c) Si $\mathbf{K} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ le corps à deux éléments. Trouver tous les sous-espaces invariants de dimension 1 de la représentation régulière de C_2.

Exercice 4 : Soit V un espace vectoriel de dimension n. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation. Soit $\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ l'application $\rho^*(g) = {}^t(\rho(g^{-1}))$. (Rappel : si $f \in \mathrm{GL}(V)$, alors ${}^tf \in \mathrm{GL}(V^*)$ est l'automorphisme de $\mathrm{GL}(V^*)$ tel que $({}^tf)(w^*)(v) = w^*(f(v))$ pour chaque $w^* \in V^*$ et pour chaque $v \in V$.)

(a) Montrer que ρ^* est une représentation linéaire de G dans V^*. On l'appelle *la représentation contragrédiente* ou *la représentation duale.*

(b) Soit $\rho' : G \to GL_n(K)$ une représentation matricielle de G. Soit $\rho'' : G \to GL_n(K)$ l'application $\rho''(g) = {}^t\rho'(g^{-1})$. Montrer que ρ'' est une représentation matricielle de G. On l'appelle la représentation contragrédiente de ρ'.

(c) On fixe une base $\mathcal{B}$ de V et la base duale $\mathcal{B}^*$ de V^*. Si $\widehat{\rho} : G \to GL_n(\mathbf{K})$ est la représentation matricielle associée à ρ par rapport à la base $\mathcal{B}$, montrer que la représentation contragrédiente de $\widehat{\rho}$ est la représentation matricielle associé à ρ^* par rapport à la base $\mathcal{B}^*$.

(d) Montrer que chaque représentation est équivalente à sa représentation biduale.

(e) Montrer que toute représentation de permutations est équivalente à sa représentation duale.

Exercice 5 : Soient V, W deux espaces vectoriels. Soient $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$ et $\rho_W : G \to \mathrm{GL}(W)$ deux représentations.

(a) Montrer qu'on peut définir une représentation $\rho_{V,W} : G \to \mathrm{GL}(Hom(V, W))$ par $\rho_{V,W}(g)(f) = \rho_W(g) f \rho_V(g^{-1})$. Autrement dit, $(g \cdot f)(v) = g \cdot (f(g^{-1} \cdot v))$. (Si W est la représentation triviale, on retrouve la représentation duale de V)

(b) Si $f \in Hom(V, W)$, on définit ${}^tf \in Hom(W^*, V^*)$ par ${}^tf(w^*)(v) = w^*(f(v))$ pour chaque $w^* \in W^*$ et $v \in V$. Montrer que l'application $f \to {}^tf$ de $Hom(V, W)$ dans $Hom(W^*, V^*)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels qui est G-équivariante.

(c) Montrer que la composante triviale de $Hom(V, W)$ est exactement $Hom_G(V, W)$.

Exercice 6 : Soit $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation réelle d'un groupe fini G. On dit qu'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur V est G-invariant si $\rho_V(g)$ est une isométrie pour chaque $g \in G$.

(a) Soit $(\cdot, \cdot)$ un produit scalaire quelconque sur V. Montrer que $\langle v, w \rangle = \sum_{g \in G} (gv, gw)$ définit un produit scalaire invariant sur V.

(b) Si $U \subset V$ est un sous-espace invariant, montrer que le complément orthogonal $U^\perp$ par rapport à un produit scalaire invariant est aussi invariant.

(c) Montrer que toute représentation matricielle réelle de G est équivalente à une représentation orthogonale.

(d) Montrer que toute représentation matricielle complexe de G est équivalente à une représentation unitaire.