

Fiche 3 : Exercices MA1 – Algèbre 2
2018

Exercice 1 : Représentations de degré 1.

- (a) Soit $\varphi, \psi \in \text{GL}(V)$. Supposons que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Soit E_λ l'espace propre de valeur propre λ pour l'automorphisme φ . Montrer que $\psi(E_\lambda) \subset E_\lambda$.
- (b) Soit G un groupe abélien fini. Montrer que chaque représentation irréductible de G où $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ est de degré 1. Si chaque représentation irréductible complexe d'un groupe fini est de degré 1, peut-on conclure que G est abélien ?
- (c) Soit G un groupe abélien fini. Trouver toutes les $\mathbf{C}$ -représentations irréductibles de G . (Utiliser la classification des groupes abéliens finis.)
- (d) Soit G un groupe fini, et soit $\rho : G \rightarrow \mathbf{K}^*$ une représentation de degré 1. Montrer que le sous-groupe engendré par les commutateurs est contenu dans le noyau de ρ .
- (e) En-déduire que le nombre de représentations de degré 1 de G divise l'ordre de G pour $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

Exercice 2 : Etude d'une représentation de degré 2 de S_4 .

- (a) Soit N le sous-groupe engendré par les commutateurs de A_4 . Déterminer les éléments de N . Montrer que N est un sous-groupe normal d'ordre 4.
- (b) Soit H le sous-groupe de S_4 de permutations de $\{1, 2, 3, 4\}$ qui fixent l'élément 4. Montrer que $H \cong S_3$, et que $H \cap N = \{id\}$.
- (c) Montrer que chaque $g \in G$ s'écrit de façon unique comme $g = hn$, avec $h \in H$ et $n \in N$. En déduire que $G/N \cong S_3$.
- (d) Trouver explicitement une représentation irréductible de S_4 de degré 2.
- (e) Considérer cette représentation restreinte au groupe A_4 de degré 2. Est-elle une représentation irréductible de A_4 (sur $\mathbf{R}$ ou sur $\mathbf{C}$) ? Trouver une représentation irréductible de A_4 de degré 3.

Exercice 3 : Représentations irréductibles des groupes diédraux : Soit $n \geq 3$, et

$G = D_{2n} = \{1, r, \dots, r^{n-1}, s, rs, \dots, r^{n-1}s\}$ le groupe diédral à $2n$ éléments.

- (a) Trouver toutes les représentations de degré 1 de G . (Il faut considérer séparément les cas où n est pair et n est impair.)
- (b) En utilisant la définition du groupe D_{2n} comme les isométries d'un n -gone du plan, donner une représentation ρ irréductible de degré 2 de G sur $\mathbf{R}$. Montrer qu'on peut diagonaliser $\rho(r)$ sur $\mathbf{C}$.
- (c) Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation. Soit $v \in V$ un vecteur propre de $\rho(r)$. Montrer que le sous-espace vectoriel W de V engendré par v et $\rho(s)v$ est invariant.
- (d) Montrer W est une sous-représentation irréductible si et seulement si soit $\dim(W) = 1$ soit la valeur propre de v n'est pas ± 1 . Montrer que chaque représentation irréductible de G sur $\mathbf{C}$ est de degré 1 ou 2.
- (e) Supposer que n est impair. Trouver la décomposition de la représentation régulière sur $\mathbf{C}$ de G en représentations irréductibles. (D'abord trouver les vecteurs propres de l'image de r .) Déterminer les composantes isotopiques.
- (f) Même question pour n pair.