Fiche 4 : Exercices MA1 – Algèbre 2
2018

On considère des représentations de la forme $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ où G est un groupe fini et V est un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel (de dimension finie).

Exercice 1 : Soit G un groupe fini. Soit χ le caractère d'une représentation de $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$, où V est un espace vectoriel de dimension d .

- (a) Montrer que $\chi(1) = d$.
- (b) Soit $g \in G$. Montrer que $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.
- (c) Montrer que χ est une fonction centrale sur G .
- (d) Si $\rho_i : G \rightarrow \text{GL}(V_i)$ ($i = 1, 2$) sont deux représentations avec caractères χ_i ($i = 1, 2$), montrer que le caractère de $\rho_1 \oplus \rho_2$ est $\chi_1 + \chi_2$.
- (e) Déterminer le caractère du dual d'une représentation.

Exercice 2 : Soit G un groupe d'ordre n . En cours, vous avez démontré : il y a un nombre fini de représentations irréductibles non équivalentes, et l'ensemble des caractères de ces représentations forme une base orthonormée du $\mathbf{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{H}$ des fonctions centrales de G à valeurs dans $\mathbf{C}$, où le produit scalaire sur $\mathcal{H}$ est donné par $\langle \varphi | \psi \rangle = (1/n) \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\psi(g)}$. Utiliser ce résultat pour montrer les propriétés suivantes.

- (a) Soit m le nombre de classes de conjugaison de G . Montrer qu'il y a exactement m représentations irréductibles (à équivalence près) de G .
- (b) Soient $g, h \in G$. Alors montrer que g et h sont conjugués si et seulement si $\chi(g) = \chi(h)$ pour chaque caractère (irréductible) de G .
- (c) Soit χ le caractère d'une représentation irréductible $\rho : G \rightarrow \text{GL}(W)$ et θ le caractère d'une représentation $\varphi : G \rightarrow \text{GL}(V)$. Montrer que $\langle \chi | \theta \rangle = k$, où la composante isotopique de V qui correspond à W contient k copies de W .
- (d) Montrer que deux représentations de G sont équivalentes si et seulement si leurs caractères sont égaux.
- (e) Montrer qu'une représentation est irréductible si et seulement si son caractère est de norme égale à 1.
- (f) Décrire le caractère de la représentation régulière de G . En déduire la décomposition en somme directe de représentations irréductibles.
- (g) Soit $g \in G$. On note $c(g)$ le nombre d'éléments dans la classe de conjugaison de g . Soit $\{\chi_1, \dots, \chi_m\}$ l'ensemble des caractères des représentations irréductibles de G . Montrer que $\sum_{i=1}^m |\chi_i(g)|^2 = n/c(g)$. Si $h \in G$ n'est pas conjugué à g , montrer que $\sum_{i=1}^m \chi_i(g) \overline{\chi_i(h)} = 0$.

Exercice 3 : Représentations de A_4 .

- (a) Déterminer quelles représentations irréductibles de S_4 sont irréductibles en tant que représentation de A_4 .
- (b) Quelles paires de représentations de S_4 non isomorphes deviennent isomorphes en tant que représentations de A_4 ?
- (c) Est-ce que chaque représentation de A_4 est la restriction d'une représentation de S_4 ?

Exercice 4 : Soit G un groupe fini. On fixe $g \in G$.

- (a) Si g est d'ordre 2 et χ est un caractère, montrer que $\chi(g)$ est entier et de la même parité que $\chi(1)$.
- (b) Montrer que g est conjugué à g^{-1} si et seulement si $\chi(g)$ est réel pour tout caractère (irréductible) χ . On dit qu'une classe de conjugaison est *réelle* si elle contient l'inverse d'un (et alors de chacun) de ses éléments. On a donc montré qu'une classe de conjugaison est réelle si et seulement si tout caractère de G n'y prend que des valeurs réelles.
- (c) Soit g conjugué à g^{-1} et d'ordre 3. Soit χ un caractère de G . Montrer que $\chi(g)$ est entier, et que $\chi(1)$ est congru à $\chi(g)$ modulo 3.

Exercice 5 : Soit G un groupe fini, et soit $f : G \rightarrow G$ un automorphisme.

- Si χ est un caractère de G , montrer que $\chi \circ f$ est aussi un caractère de G .
- Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
 - Pour tout $g \in G$, $f(g)$ est conjugué à g .
 - Pour tout caractère irréductible χ , on a que $\chi \circ f = \chi$.
- En déduire que, si f est un automorphisme intérieur, alors $\chi \circ f = \chi$ pour chaque caractère χ .
Remarque : La réciproque n'est pas vraie. Il existe des automorphismes extérieurs qui préservent les classes de conjugaison. (Burnside, 1913)
- Montrer que $\chi \circ f$ est irréductible si et seulement si χ est irréductible.

Exercice 6 : Soit $A_n \subset S_n$ le groupe alterné. Le but de cet exercice est d'étudier les classes de conjugaison de A_n . Si $\sigma \in A_n$, alors on note σ^{A_n} la classe de conjugaison de σ dans A_n , et σ^{S_n} la classe de conjugaison de σ dans S_n .

- Montrer que $\sigma^{A_n} = \sigma^{S_n}$ si et seulement si il existe une permutation π impaire qui commute avec σ .
Montrer que cette condition est équivalente à la condition suivante : dans la décomposition en produit de cycles disjoints, il y a soit un cycle de longueur paire soit deux cycles d'une même longueur impaire.
- Déterminer les classes de conjugaison de A_n et leurs cardinaux pour $n = 4, 5$ et 6 .
- Montrer que chaque représentation de S_n est auto-duale.
- Déterminer pour quelles valeurs de n avec $3 \leq n \leq 7$ on a que chaque représentation de A_n est auto-duale.

Exercice 7 : Soit G un groupe fini. On suppose que $\rho_V : G \rightarrow \text{GL}(V)$ est une représentation irréductible, et χ est un caractère linéaire de G . Montrer que l'application $\tilde{\rho} : G \rightarrow \text{GL}(V)$ telle que $\tilde{\rho}(g) = \chi(g)\rho(g)$ pour tout $g \in G$ est aussi une représentation irréductible. En déduire que si θ est le caractère d'une représentation irréductible, alors $\chi \cdot \theta$ est aussi le caractère d'une représentation irréductible.

Exercice 8 : Supposons que G est un groupe d'ordre 12, avec six classes de conjugaison, tel qu'une partie de la table des caractères de G est donnée par :

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ	1	$-i$	i	1	-1	-1
θ	2	0	0	-1	-1	2

- Déduire la table complète des caractères et les cardinaux des classes de conjugaison. Si G existe, en déduire que G est un groupe non-abélien isomorphe ni à A_4 ni à D_{12} . (Indication : Pour D_{12} , déterminer $Ab(D_{12})$, et trouver les caractères de degré 1.)
- Soit K le sous-groupe de S_{12} engendré par $a = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$ et $b = ((1\ 7\ 4\ 10)(2\ 12\ 5\ 9)(3\ 11\ 6\ 8))$.
 - Trouver les ordres de a et b , et montrer que $b \notin \langle a \rangle$. Montrer que $b^2 = a^3$, et calculer bab^{-1} . En déduire que $|K| = 12$. (Indication : Montrer que chaque élément de K s'écrit de façon unique comme $a^k b^\ell$, où $0 \leq k \leq 5$, et $0 \leq \ell \leq 1$.)
 - Montrer que le sous-groupe N de K engendré par a^2 est normal, et que G/N est cyclique d'ordre 4. Montrer que K a au moins 4 caractères linéaires distincts.
 - Montrer que $\theta(a^3) \in \mathbf{Z}$ pour chaque caractère θ de K .
 - Utiliser les relations d'orthogonalité pour compléter la table des caractères de K .

Exercice 9 : Caractères de Q_8 et de D_8 .

- Écrire les tables de caractères des deux groupes. Qu'est-ce qu'on observe ?
- Déterminer les multiplicités de chaque caractère irréductible dans chaque produit de deux caractères irréductibles. Qu'est-ce qu'on observe ?
- Déterminer les carrés symétriques et antisymétriques de chaque caractère. Qu'est-ce qu'on observe ?