Feuille de TD n°1

Révision de dualité.

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel (de dimension quelconque, finie ou non).

1. Soit H un hyperplan de E et F un sous-espace vectoriel de E contenant H. Montrer que $F = H$ ou que $F = E$.
2. Soient f et g deux formes linéaires sur E telles que $\ker f = \ker g$.
   (a) Montrer que f et g sont colinéaires ;
   (b) en déduire que si H est un hyperplan de E, alors l'ensemble des formes linéaires qui s'annulent sur H est de dimension 1.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et a_1, a_2, a_3 trois triplets :

$$a_1 = (1, 0, 0) \quad a_2 = (1, 1, 0) \quad a_3 = (1, 1, 1).$$

1. Montrer que $\mathscr{A} = (a_1, a_2, a_3)$ est une base de E ;
2. Déterminer la base duale $\mathscr{A}^*$ de $\mathscr{A}$.
3. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x, y, z) = x - 2y + 5z$. Déterminer les coordonnées de φ dans la base $\mathscr{A}^*$.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2. On pose

$$\forall P \in E \quad \varphi_i(P) = \int_0^i P(t)\,\mathrm{d}t \qquad i \in \{1, 2, 3\}.$$

1. Montrer que $\mathscr{B} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E^* ;
2. Déterminer la base antéduale $\mathscr{A}$ de $\mathscr{B}$.

Exercice 4. (Interpolation de Lagrange). Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha_0, \alpha_1 \dots, \alpha_n$ des scalaires deux à deux distincts. On pose

$$L_i = \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne i}} \frac{X - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}.$$

1. Montrer que $\mathscr{L} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de E.
2. Déterminer sa base duale $\mathscr{L}^*$.
3. Montrer qu'il existe d'unique coefficients $\beta_0, \beta_1 \dots, \beta_n$ tels que

$$\forall P \in E \qquad \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \beta_k P(\alpha_k).$$

4. Pour $n = 2$, expliciter $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

Produits scalaires.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel réel.

1. $E = \mathbb{R}^2$. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pour $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ dans E, on pose

$$\varphi(u, v) = axx' + bxy' + cx'y + dyy'.$$

   Donner une écriture matricielle de φ dans la base $\mathscr{E}$. Donner une CNS (condition nécessaire et suffisante) sur a, b, c et d pour que φ soit un produit scalaire sur E.

2. E est un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. Pour u et v dans E on note (x, y, z) et (x', y', z') leurs coordonnées respectives dans $\mathscr{E}$.
   (a) Donner une écriture matricielle des applications suivantes dans la base $\mathscr{E}$ et déterminer si ce sont des produits scalaires ou non :
   $$\psi_1 : (u, v) \mapsto xx' + zx' + x'y + yz' + zy' \quad \psi_2 : (u, v) \mapsto xx' - (xz' + zx') + yy' + zz'$$
   $$\psi_3 : (u, v) \mapsto 2xx' - xy' - x'y + 3zz' \quad \psi_4 : (u, v) \mapsto xx' - 2xy' - 2x'y + 3zz'$$
   (b) On pose : $\psi(u, v) = axx' + bxy' + cx'y + dxz' + eyy' + fyz' + gzz'$.
   Donner une écriture matricielle de ψ dans la base $\mathscr{E}$ et une CNS sur a, b, c, d, e, f et g pour que φ soit un produit scalaire sur E.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n muni d'une base $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$. Pour x et y dans E, on note $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ leurs coordonnées.

1. Soit $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$. À quelle condition sur w l'application :
   $$\varphi : (x, y) \mapsto \sum_{k=1}^{n} w_k x_k y_k$$
   définit-elle un produit scalaire sur E ?
2. Soit S la matrice (réelle $n \times n$) dans la base $\mathscr{B}$ d'une forme bilinéaire ψ sur E. On note X et Y les matrices colonnes représentant x et y.
   (a) Donner une écriture matricielle de $\psi(x, y)$.
   (b) Donner deux conditions nécessaires visibles immédiatement sur cette matrice S pour qu'elle soit la matrice d'un produit scalaire. Ces deux conditions sont-elles suffisantes ? Justifier.

Exercice 7. On considère $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On considère $\mathscr{C} = (1, i)$ la base canonique. On note $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ $(x, y, x', y' \in \mathbb{R})$.

1. Exprimer zz' et $\bar{z}z'$ en fonction de x, y, x', y'.
2. Déterminer si les applications suivantes sont bilinéaires, bilinéaires symétriques et si ce sont des produits scalaires :
   $$\varphi_1 : (z, z') \mapsto \mathrm{Re}(zz') \quad \varphi_2 : (z, z') \mapsto \mathrm{Im}(zz') \quad \varphi_3 : (z, z') \mapsto \mathrm{Re}(\bar{z}z') \quad \varphi_4 : (z, z') \mapsto \mathrm{Im}(\bar{z}z').$$

Exercice 8. Démontrer que les formules ci-dessous définissent des produits scalaires sur E.

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $B(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3$ pour $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$.
2. $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\varphi(P, Q) = P(2)Q(2) + P(-1)Q(-1) + P(3)Q(3) + P(0)Q(0)$ pour tout P et Q de $\mathbb{R}^3[X]$.
3. $E = \mathscr{C}\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$ espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec $\psi(f, g) = \displaystyle\int_0^1 t^2 f(t)g(t)dt$.
   Que se passe-t-il si on remplace E par l'espace des fonctions continues par morceaux sur $[0, 1]$?

Exercice 9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques d'ordre inférieur ou égal à n, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :
$$P : \ x \mapsto P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

1. Montrer que $\mathcal{P}_n$ est un espace vectoriel et donner une majoration de sa dimension.
2. Soit $P \in \mathcal{P}_n$. Montrer que $n^2P + P'' \in \mathscr{P}_{n-1}$. En déduire une base de $\mathscr{P}_n$, et donc la dimension de $\mathscr{P}_n$.
3. Soit $P \in \mathcal{P}_n$. Exprimer $P(x)$ en utilisant les exponentielles complexes.
4. En déduire que si $P \in \mathcal{P}_n$ s'annule en $2n + 1$ points deux à deux distincts dans $[-\pi, \pi[$ alors $P = 0$.
5. Montrer que si $x_0, \dots, x_{2n}$ sont des réels deux à deux distincts dans $[-\pi, \pi[$, alors l'application :
   $$\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^{2n} P(x_i)Q(x_i)$$
   définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{P}_n$.

Exercice 10. Soit E un espace euclidien. On note $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ le produit scalaire et $f, g : E \to E$ telles que
$$\forall x, y \in E \quad \langle f(x) \mid y \rangle = \langle x \mid g(y) \rangle$$
Montrer que f et g sont linéaires.