Feuille de TD n°4

Exercice 1.

1. Montrer que $\langle P \mid Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Calculer la distance $d(X^2, \mathscr{P})$ de X^2 à $\mathscr{P} = \{aX + b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^4$, muni de sa base orthonormée canonique, déterminer le projeté orthogonal du vecteur $(3, 4, -2, -3)$ sur le plan défini par les vecteurs $(1, 1, -1, 1)$ et $(2, 1, 2, 0)$.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$ où $v_1 = (1, 1, 0, 1)$ et $v_2 = (1, 1, 1, 1)$. Déterminer la matrice P dans la base canonique de la projection orthogonale p_F sur F .

Exercice 4. Soit E un espace euclidien de dimension 4 et $\mathscr{E}$ une base orthonormale de E. Soit F le sous-espace vectoriel E d'équations (dans la base $\mathscr{E}$) :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0. \end{cases}$$

Déterminer la projection orthogonale sur F. Calculer la distance $d(u, F)$ d'un vecteur u de E au sous-espace F.

Exercice 5. Plaçons nous dans $\mathbb{R}^3$ euclidien. Soit y_0 un vecteur unitaire : $y_0 = (u, v, w)$ et $D = \text{Vect}(y_0)$. Soit p la projection orthogonale sur D.

1. Déterminer l'orthogonal Π de D.
2. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^3$, $p(x) = \langle x \mid y_0 \rangle\, y_0$.
3. Donner la matrice P de p dans la base canonique.
4. Soit q la projection orthogonale sur Π, donner la matrice Q de q dans la base canonique. Quel est le lien entre P et Q ? Justifier
5. Pour tout x de $\mathbb{R}^3$, déterminer $\inf\limits_{y \in D} \|x - y\|$ et $\inf\limits_{y \in \Pi} \|x - y\|$.

Exercice 6. On se place dans $E = \ell^2(\mathbb{R})$, espace des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ dont la série des carrés $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ converge. On utilise la notation $u = (u_n)_{n \geq 0}$ pour désigner un élément de E. Soit $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall (u, v) \in E \times E \qquad \langle u \mid v \rangle = \sum_{n \geq 0} u_n v_n.$$

1. Montrer que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Soient a, b et c les suites de terme général $a_n = \frac{1}{2^n}$, $b_n = \frac{1}{3^n}$, $c_n = \frac{n}{6^{n+1}}$, . Déterminer le projeté orthogonal de c sur $\text{Vect}\{a, b\}$.

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^4$ rapporté à sa base canonique, on considère le sous-ensemble H défini par :

$$H = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_3 - x_4 = 0\}.$$

1. (a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel et en donner une base.
   (b) Déterminer le sous-espace vectoriel, $H^\perp$, orthogonal de H, puis une base orthonormale de $H^\perp$ (par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt).
   (c) Déduire des questions précédentes une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ autre que la base canonique.
2. (a) Soient π_H et $\pi_{H^\perp}$ les projections orthogonales sur H et $H^\perp$. Déterminer les projetés $\pi_H(y)$ et $\pi_{H^\perp}(y)$ de $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.
   (b) Déterminer la matrice P de π_H dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. En déduire la matrice Q de $\pi_{H^\perp}$.
3. Calculer $\inf\limits_{x \in H}((1 - x_1)^2 + (2 - x_2)^2 + (3 - x_3)^2 + (4 - x_4)^2)$

Exercice 8. Soit le système (S) suivant, d'écriture matricielle $AX = b$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:

$$(S)\left\{\begin{array}{lcr} x+y & = & 1 \\ x-y & = & 3 \\ 2x+y & = & 27 \end{array}\right.$$

Afin de simplifier, on identifiera les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ avec la matrice colonne de leurs coordonnées dans la base canonique : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 27 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

1. Montrer que ce système n'admet pas de solution.

Le but est de trouver la "meilleure solution approchée", c'est à dire celle qui minimise $\|AX - b\|$.

2. Calculer $B = {}^tAA$, montrer que B est inversible et calculer B^{-1}.
3. Montrer que $X_0 = B^{-1}\,{}^tA\,b$ réalise le minimum suivant : $\displaystyle\inf_{X\in\mathbb{R}^2} \|AX - b\|$.

Exercice 9. Soit E un espace euclidien de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Soit

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice d'un endomorphisme de E dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que A est la matrice d'une projection orthogonale.

Exercice 10. Calculer

1. $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2\,\mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 (x^2 - ax - b)^2\,dx$;
3. $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2(\ln(x) - ax - b)^2\,dx$.

Exercice 11.

1. Montrer que $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur l'ensemble E des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ engendré par $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = e^x$ et $f_3(x) = x$.
2. Pour quels réels a et b, la distance de f_2 à $g : x \mapsto ax + b$ est-elle minimale ?

Exercice 12. On définit une application $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ par $\varphi(P, Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer $\varphi(X^p, X^q)$.
3. Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - (at + b))^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 13. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A \mid B\rangle = \mathrm{tr}\,(A\,{}^tB)$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ les sous-espaces vectoriels des matrices symétriques et antisymétriques respectivement.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
2. Exprimer la distance de M à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ où
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
3. Montrer que l'ensemble H des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension. Donner la distance à H de la matrice J dont tous les coefficients valent 1.
4. Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\displaystyle\inf_{M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{1\le i,j\le n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$.

Exercice 14. On munit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire : $(f \mid g) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, on note $P_i(x) = x^i$.

1. Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) est libre mais pas orthogonale.
2. Déterminer, par le procédé de Schmidt, une base orthonormée (Q_0, Q_1, Q_2) de $F = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, P_2)$ à partir de la famille (P_0, P_1, P_2).
3. Calculer le projeté orthogonal de P_3 sur F et la distance de P_3 à F.