Université de Bourgogne
Département de mathématiques
UFR Sciences et Techniques

Licence 2
UE Math42- Algèbre

# Feuille de TD n°5

**Exercice 1.** Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle, donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+y+z=0$, puis de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.

**Exercice 2.** Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne usuelle, donner la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à la droite de vecteur directeur $u=(3,4)$.

**Exercice 3.**

1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle, donner la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $u=(1,-2,2)$. Quel est son déterminant ?
2. Donner la matrice de la réflexion par rapport à $\mathscr{D}^\perp$. Quel est son déterminant ?

**Exercice 4.** Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n$, et $u$ une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace $H$ de dimension $k$. Donner le déterminant de toute matrice de $u$ dans une base orthonormale de $E$.

**Exercice 5.** Soit $E$ un espace euclidien de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de $E$. Soit

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

la matrice d'un endomorphisme de $E$ dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $A$ est la matrice d'une symétrie orthogonale. Déterminer le sous-espace par rapport auquel c'est une symétrie orthogonale.

**Exercice 6.** Soit $\mathscr{E}=\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f \mid g\rangle=\int_{-1}^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. On note $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ les sous-ensembles de $\mathscr{E}$ formés des fonctions paires et impaires. Montrer que $\mathscr{I}=\mathscr{P}^\perp$.
2. Soit $\varphi : f\mapsto \hat{f}$ avec $\hat{f}(x)=f(-x)$. Montrer que $\varphi$ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{P}$.

**Exercice 7.** Soit $E$ un espace vectoriel euclidien. Montrer qu'un sous-espace vectoriel $F$ est stable pour $u\in\mathcal{L}(E)$ si et seulement si $F^\perp$ est stable pour $u^*$.

**Exercice 8.** Soit $E$ un espace vectoriel euclidien et soit $f\in\mathcal{L}(E)$ un projecteur.

1. Démontrer que $f^*$ est un projecteur.
2. Montrer que $f^*=f$ si et seulement si $f$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(f)$.
3. On suppose que $f$ et $f^*$ commutent.
   - Démontrer que $f\circ f^*$ est une projection orthogonale
   - Démontrer que $\ker(f\circ f^*)\cap \mathrm{Im}(f)=\{0\}$.
   - En déduire que $\ker(f\circ f^*)=\ker(f)$ et que $\mathrm{Im}(f\circ f^*)=\mathrm{Im}(f)$.
4. En déduire que $f$ et $f^*$ commutent si et seulement si $f=f^*$.

**Exercice 9.** Identifier les endomorphismes de matrice suivantes dans une base orthonormale (préciser leur nature et les éléments caractéristiques) :

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix},\quad B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix},\quad C=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},\quad D=\frac{-1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Préciser lesquels sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$ (et les diagonaliser).

**Exercice 10.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible vérifiant $A\,{}^tA = {}^tAA$. Montrer que la matrice $\Omega = {}^tA^{-1}A$ est orthogonale.

**Exercice 11.** Soient $F$ un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien $E$ et $f \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que $f(F^\perp) = f(F)^\perp$.

**Exercice 12.** On considère des réels $a$, $b$, $c$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix}$$

1. A quelle condition $A$ est-elle orthogonale ?
2. Cette condition étant réalisée, reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice canonique $A$.

**Exercice 13.** Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $\sigma = ab+bc+ca$, $S = a+b+c$ et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

1. Montrer que : $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \iff \big(\sigma = 0 \text{ et } S \in \{-1,1\}\big)$ et que : $M \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R}) \iff \big(\sigma = 0 \text{ et } S = 1\big)$.
2. Montrer que $M$ est une matrice de rotation si et seulement si il existe $k \in [0, \frac{4}{27}]$ tel que $a$, $b$ et $c$ sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$. Indiquer les éléments de la rotation.

**Exercice 14.** Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique, on désigne par $u$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $u \in \mathcal{O}^+(E)$.
2. Soit $H$ un hyperplan de $E$ d'équation $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$ où les $\alpha_i$ ne sont pas tous nuls. Déterminer l'image de $H$ par $u$.

**Exercice 15.** On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$$

1. Montrer que la relation
$$u(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)\,dt$$
définit un endomorphisme symétrique $u$ de l'espace $E$.
2. Calculer la trace de $u$.