À lire attentivement

Liste des sujets

Cette année tous les étudiants, quelle que soit leur filière (PMG, MI, MEEF), feront leurs mémoires de Master 1 individuellement. On distingue deux types de sujet : les sujets pour des mémoires de recherche (adressés aux étudiants de PMG et MI) et les sujets pour des mémoires de vulgarisation (adressés aux étudiants de MEEF). Si un étudiant de MEEF souhaite faire un mémoire de recherche plutôt qu'un mémoire de vulgarisation, une dérogation pourra lui être accordée après étude de son dossier. En revanche les étudiants des filières PMG et MI ont obligation de faire un mémoire de recherche.

Pour les mémoires de vulgarisation, le travail demandé sera la rédaction d'un article de vulgarisation de 3-4 pages (dont le contenu mathématique doit être accessible à un étudiant de Licence) et une soutenance de 20 minutes où le contenu de l'exposé sera en lien avec l'article de vulgarisation mais aura un contenu mathématique qui pourra par exemple être un cas particulier de la théorie mathématique divulguée dans l'article ou la preuve détaillée d'un résultat de la théorie. La soutenance ne sera pas un exposé de vulgarisation qui reprendrait le contenu de l'article de vulgarisation et l'étudiant devra montrer sa capacité à présenter un exposé avec des concepts mathématiques avancés.

Pour les mémoires de recherche des étudiants PMG, le travail demandé sera la rédaction d'un rapport d'environ 20-30 pages en Latex au format 11pt et une soutenance de 20 minutes devra démontrer que les étudiants maîtrisent les mathématiques contenues dans le mémoire. Pour les étudiants de la filière MI, les modalités de la soutenance des mémoires sont décidées par le responsable du Master 1 (Giuseppe DITO, bureau A327).

Pour chaque sujet proposé dans la liste ci-dessous, les étudiants peuvent trouver le titre, le public visé (PMG, MI, PMG-MI), le nom de l'enseignant responsable, un résumé et des références. N'hésitez pas à contacter le responsable d'un sujet afin d'avoir des idées plus précises sur le travail attendu. **Notez cependant que cette prise de contact ne garantit en rien le fait que ce sujet vous sera attribué.**

Remise des choix

Chaque étudiant doit choisir au moins 6 sujets dans la liste et les classer par ordre de préférence. Ensuite chaque étudiant doit m'envoyer sa liste de six sujets par courrier électronique avant le **vendredi 16 novembre**. Vous pouvez éventuellement préciser vos motivations pour ces choix. Notez que les affectations, qui seront décidées par le responsable des mémoires de Master 1 MEEF-PMG (Ronan TERPEREAU) et par le responsable du Master 1 International (Giuseppe DITO), ne se feront pas sur le critère du “premier arrivé, premier servi”.

Liste d'affectation des sujets

Une liste affectant à chaque étudiant un sujet sera affichée au plus tard le vendredi 23 novembre sur le panneau d'affichage des Masters 1.

Soutenance

Chaque étudiant devra :

(1) effectuer un **exposé oral de 20 minutes** devant un jury de trois enseignants (dont l'encadrant et le responsable des mémoires). La soutenance est **obligatoire** même pour les étudiants n'ayant rien fait. Un rétroprojecteur et un vidéo-projecteur seront à votre disposition.
(2) rendre trois exemplaires d'un **rapport écrit** le jour de la soutenance,
(3) envoyer au responsable des mémoires par courrier électronique la version finale de son rapport au format PDF au plus tard une semaine avant la soutenance.

Les dates précises de soutenances (prévues en mai 2019) vous seront indiquées ultérieurement.

Responsable

Ronan TERPEREAU, bureau A328, ronan.terpereau@u-bourgogne.fr.

SUJET 1 . **Nombres rationnels, algébriques, transcendants. Approximation Diophantienne, mesure d'irrationalité.**

Mots-clefs : histoire, exemples, usage des fractions continues, points de vue du cardinal et de la mesure.

RÉFÉRENCES :

(1) Y. Bugeaud, Approximation by algebraic numbers, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 160, Cambridge University Press, Cambridge, 2004
(2) Michel Waldschmidt, Introduction to Diophantine methods irrationality and transcendence `http://webusers.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/articles/pdf/IntroductionDiophantineMethods.pdf`

RESPONSABLE : Olivier Couture

SUJET 2 . **Le groupe monstre.**

RÉSUMÉ : Le groupe monstre est le plus gros des groupes simples sporadiques. Dans le but de classifier les groupes finis, traditionnellement on se restreint aux groupes "simples", n'ayant aucun sous groupe normal non trivial. Ces groupes forment 18 de familles infinies, auxquelles s'ajoutent 26 groupes sporadiques. Le plus gros parmi ces derniers est appelé le monstre. Il a cardinal $2^46 * 3^20 * 5^9 * 7^6 * 11^2 * 13^3 * 17 * 19 * 23 * 29 * 31 * 41 * 47 * 59 * 71$, ce qui équivaut plus ou moins à $8 * 10^53$.
Dans ce mémoire on étudiera l'histoire de la classification des groupes finis et en particulier du groupe monstre.

RÉFÉRENCES : Martin Gardner, "The Last Recreations", Springer-Verlag 1997, chapitre 9, "The Monster and Other Sporadic Groups", livre disponible sur SpringerLink en pdf.

RESPONSABLE : Daniele Faenzi

SUJET 3 . **Les nombres ne sont pas tous gentils.**

RÉSUMÉ : Une réflexion sur les nombres à partir de la note de J. Liouville dans les Comptes-rendus de l'Académie des sciences, séance du lundi 13 mai 1844. Si les nombres entiers et les rationnels sont ńgentilsż, les autres nombres le sont moins. On illustrera pourquoi les nombres algébriques sont plus gentils que les nombres transcendants, et on justifiera l'importance du travail de J. Liouville.

RÉFÉRENCES : La note citée et bibnum, wikipedia.

RESPONSABLE : Jérôme Laurens

SUJET 4 . **À la recherche des racines de polynômes.**

RÉSUMÉ : À l'occasion du 250ème anniversaire de la naissance de Fourier, je propose l'étude du livre *Analyse des équations déterminées*, par M. Fourier.

RÉFÉRENCES : La 1ère partie du livre est disponible en ligne sur Gallica, et plus particulièrement le livre premier concernant la séparation des racines d'une équation polynomiale.

RESPONSABLE : Jérôme Laurens

SUJET 5 . **Racines de polynômes réels.**

RÉSUMÉ : Dans ce mémoire on étudiera deux aspects des racines de polynômes avec coefficients réels. La première partie concerne le calcul exact des racines pour les polynômes de degré au plus 4. Quand le polynôme est de degré 2, vous connaissez une formule en fonction des coefficients du polynôme pour trouver les deux racines complexes, et déterminer s'il y a des racines réelles. Ici on étudiera les cas de degré 3 et 4.
La deuxième partie concerne l'approximation des racines réelles pour les polynômes de degré quelconque. Quand le degré est au moins 5, il n'y a pas de formule explicite analogue à celle de degré inférieur. Par contre, on peut approximer les racines réelles. On étudiera le théorème de Sturm qui donne une méthode pour déterminer le nombre de racines réelles dans un intervalle donné.

RÉFÉRENCES :

(1) "Algèbre", Birkhoff, MacLane
(2) `http://serge.mehl.free.fr/chrono/Sturm.html`

RESPONSABLE : Lucy Moser-Jauslin

SUJET 6 . **Sir Michael Francis Atiyah et l'hypothèse de Riemann.**

RÉSUMÉ : Lorsque l'un des mathématiciens les plus connus du vingtième siècle, Sir Michael Francis Atiyah, primé par la médaille Fields et le prix Abel, prétend avoir démontré l'une des conjectures les plus importantes des mathématiques contemporaines, l'hypothèse de Riemann, valant un million de dollars, on est en droit de se poser les questions suivantes.
- Qui est Sir Michael Francis Atiyah ?
- Qu'est-ce que l'hypothèse de Riemann ?
- A-t-il vraiment résolu cette conjecture ?
Le but de ce travail est d'écrire un article de vulgarisation qui fournisse des éléments de réponse à ces questions.

RESPONSABLE : Luis Paris

SUJET 7 . **Un survol de la théorie des pavages.**

RÉSUMÉ : Un *pavage* est une partition du plan euclidien par des éléments d'un ensemble fini, appelés *tuiles*. Les pavages les plus simples sont les pavages *périodiques*, connus depuis l'Antiquité et souvent utilisés comme motifs décoratifs en architecture, dont on sait aujourd'hui qu'ils peuvent tous être construits à partir de seulement 19 types de tuiles.
Les mathématiciens ont longtemps pensé que tout jeu de tuiles pouvant paver le plan pouvait le faire périodiquement. Cependant, en 1966, Robert Berger a trouvé un ensemble de 20 426 tuiles ne pouvant paver qu'apériodiquement le plan. Des ensembles toujours plus petits de tuiles ne pavant qu'apériodiquement le plan ont depuis été trouvés et on connaît à présent de tels ensembles entre 6 et 13 tuiles.
Le but de ce mémoire est de faire une synthèse des principaux résultats connus de cette jolie théorie des pavages du plan euclidien (à l'interface entre géométrie plane, topologie et théorie des groupes) sous la forme d'un article de vulgarisation.

RESPONSABLE : Ronan Terpereau

SUJET 8 . **Solide platoniciens et groupes de symétrie.**

RÉSUMÉ : Le but est de comprendre les liens entre les polyèdres ou polygones réguliers et les sous-groupes finis des groupes des isométries du plan ou de l'espace. L'article de divulgation visera en particulier à essayer d'expliquer certaines notions de la théorie des actions de groupes comme celle de stabilisateur. On pourra s'intéresser aussi aux solides semi-réguliers, dit solides archimédiens.

RESPONSABLE : Emmanuel Wagner

SUJET 9 . **Théorème des 4 couleurs et coloriage de Tait.**

RÉSUMÉ : Le but de ce mémoire est dans un premier temps d'étudier l'histoire du théorème de 4 couleurs et de sa preuve. On s'intéressera ensuite plus particulièrement à sa reformulation en termes de certains coloriage de graphes, les coloriages de Tait. On étudiera ces coloriages pour certaines familles de graphes. On pourra aussi s'intéresser à des problèmes similaires sur d'autres surfaces que la sphère, comme le tore ou à ce qu'il se passe avec 5 couleurs.

RESPONSABLE : Emmanuel Wagner

SUJET 10 . **Chimie, théorie des noeuds et des graphes noués.**

RÉSUMÉ : Ce mémoire explorera les liens entre une branche des mathématiques qu'est la topologie et la théorie des noeuds et la chimie. On travaillera en particulier sur la notion de chiralité.

RÉFÉRENCES :

(1) The knot book, by Adams.
(2) Knot theory and its applications, by Murasugi.

RESPONSABLE : Emmanuel Wagner

SUJET 11 . **Méthodes explicites d'intégration en temps pour les systèmes différentiels (PMG et MI).**

Résumé : Les intégrateurs en temps explicites connaissent un regain d'intérêt actuellement compte-tenu de leur simplicité et de leurs performances dans certains contextes (parallélisation massive). Il s'agira dans ce projet d'étudier certains schémas d'intégration en temps explicites pour des systèmes différentiels tels que des oscillateurs, de comprendre leur propriétés théoriques (préservation d'invariants, stabilité) et de les mettre en oeuvre numériquement.

Références :

(1) G. Cohen and S. Pernet. Finite elements and discontinous Galerkin methods for transient wave equations. Springer.
(2) E. Hairer and G. Wanner. Geometric numerical integration. Springer.
(3) F. Mazarrato et al. An explicit energy-momentum conserving time-integration scheme for Hamiltonian dynamics. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01661608

Responsable : Franz Chouly

SUJET 12 . **The Wightman formalism (MI).**

Résumé : At the end of the 50's, Gårding and Wightman identified a set of fundamental properties (Wightman axioms) that a Quantum Field Theory (QFT) should satisfy. The Wightman formalism provides a mathematical ground for studying general properties of a QFT. In this context, a quantum field is interpreted as an operator-valued distribution acting on a Hilbert space carrying a representation of the Poincaré group. Locality and positivity property of the spectrum of the energy-momentum generators are the most stringent requirements that a QFT has to meet.
There are actually two equivalent formulations of the Wightman axioms: one is directly given in terms of fields, while the second provides the conditions that the vacuum expectation values of the fields (the Wightman distributions) should satisfy. The equivalence between these formulations is realized by the Wightman reconstruction theorem.
The goal of this project is to familiarize the student with the Wightman formalism by studying the case of a neutral massive scalar field. If time allows, one can go deeper in the proof of the Wightman reconstruction theorem.
Basic distribution theory, representation theory, and some acquaintance with Quantum Field Theory would be helpful.

Références :

(1) Bogolubov, N. N., Logunov, A. A., Oksak, A. I., Todorov, I. T.: *General principles of quantum field theory*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht 1990
(2) Jost, R.: *The general theory of quantized fields*, American Mathematical Society 1965
(3) Reed, M. and Simon, B.: *Methods of modern mathematical physics: Vols I and II.* Academic Press, Inc„ New York, second edition, 1980.
(4) Streater, F., Wightman, A.S.: *PCT, Spin and Statistics, and All That*, W.A. Benjamin 1964.

Responsable : Giuseppe Dito

SUJET 13 . **The geometry of gauge fields (MI).**

Résumé : The purpose of this project is to familiarize the student with the modern formulation of (classical) gauge theories.
Gauge fields mediate interactions between elementary particles, and are of paramount importance in our current understanding of particle physics. Examples of such fields are the photon, Z and $W^{\pm}$ bosons, gluon fields mediating, respectively, the electromagnetic, weak, and strong forces.
From the point of view of differential geometry, gauge fields are interpreted as connections on a principal fiber bundle with structural group being the gauge group. In this context, a matter field of a given type (e.g. electron in the EM case) is seen as a section of an associated vector bundle through a representation of the gauge group.
The student is expected to learn the basics of principal fiber bundle theory such as the ways to define a connection on them (connection 1-form, horizontal space, local formulation), associated vector bundles, etc. If time allows, one can get acquainted with characteristic classes and instantons. **Requirement:** Basic differential geometry.

Références :
(1) Bleecker, D.: *Gauge Theory and Variational Principles*, Addison-Wesley 1981.
(2) Choquet-Bruhat, Y., DeWitt-Morette, C., Dillard-Bleick, C.: *Analysis, Manifolds and Physics*, Volumes 1 and 2. North-Holland 1982, 1989.
(3) Drechsler, W., Mayer, M. E., Böhm, A., Dollard, J. D.: *Fiber bundle techniques in gauge theories*, LNP Springer, 1977.
(4) Naber, G. L.: *Topology, Geometry and Gauge fields: Foundations*. Second edition. Springer 2011.

Responsable : Giuseppe Dito

SUJET 14 . **Classification des surfaces compactes (PMG et MI).**

Résumé : Une surface est un objet géométrique qui, localement autour de tout point, rassemble à un plan (on pensera à la surface d'une table, d'une sphère, d'une tasse).
On classe d'abord les surfaces en ortientables on non orientables, en gros selon qu'on puisse distinguer la droite de la gauche de façon cohérente sur toute la surface.
Une formule célèbre d'Euler permet de ensuite de distinguer le type d'homéomorphisme d'une surface compacte selon son orientabilité et un nombre entier, la caractéristique d'Euler justement.
On étudiera dans ce mémoire la formule d'Euler et les étapes de base pour parvenir à montrer le théorème de classification des surfaces compactes.

Références : Jean Gallier, Dianna Xu, "A Guide to the Classification Theorem for Compact Surfaces", Springer 2013.

Responsable : Daniele Faenzi

SUJET 15 . **Spectraèdres (PMG et MI).**

Résumé : Les spectraèdres apparaissent en programmation semidéfinie positive et ont des applications aux sciences de l'ingénieur (aérospatiale, mécanique).
Qu'est-ce qu'un spectraèdre au juste ? D'abord, on se donne une matrice symétrique A dont les coefficients dépendent de façon linéaire du point x de $\mathbb{R}^n$. Ensuite, le spectraèdre est l'ensemble des points x tels que A est semidéfinie positive. Les spectraèdres sont donc des régions de l'espace définies par des inégalités polynomiales, qui ont des propriétés étonnantes de convexité et de rigidité.
Dans ce mémoire on étudiera ces objets et quelques uns des théorèmes qui les concernent en particulier dans le cas des spectraèdres de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.

Références :
(1) John Christian Ottem, Kristian Ranestad, Bernd Sturmfels, Cynthia Vinzant, "Quartic Spectrahedra", arXiv:1311.3675
(2) Pablo A. Parrilo, "Semidefinite Optimization", Semidefinite Optimization and Convex Algebraic Geometry, MOS-SIAM Series on Optimization, Volume 13, 2012
(3) Tim Netzer, "Spectrahedra and Their Shadows", Habilitationsschrift (Universität Leipzig), 2011

Responsable : Daniele Faenzi

SUJET 16 . **Dido's Problem and Sub-Riemannian Geometry (PMG and MI).**

Résumé : Dido's problem is a variant of the isoperimetric problem. Queen Dido had to flee across the Mediterranean in a ship after her brother, Pygmalion, had murdered her husband and taken most of her possession. Dido landed, nearly penniless, on the African coast, ruled by King Jarbas. Dido persuaded Jarbas to give her as much land as she could enclose with an ox hide. She then told her servants to cut the ox hide into a single leather string and formulated such opportunity as the following geometric problem.
Given a string of fixed length l and a fixed line L (the Mediterranean coast line) place the ends of the string on L and determine the shape of the curve c for which the figure enclosed by c together with L has the maximum possible area. Dido found the solution, a half-circle, and thus founded the semicircular city of Carthage.
The aim of this memoire is to analyse Dido's problem and the dual isoperimetric problem by means of the geodesic problem for the sub-Riemannian geometry structure on the Heisenberg group.

Références :

(1) A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *Introduction to Riemannian and sub-Riemannian geometry*, available at `https://webusers.imj-prg.fr/~davide.barilari/Notes.php`.
(2) A. Bellaiche, *The tangent space in sub-Riemannian geometry*, in *Sub-Riemannian geometry*, volume 144 of Progress in Mathematics, pages 1–78. Birkhäuser, Basel, 1996.
(3) R. Montgomery, *A tour of sub-Riemannian geometries, their geodesics and applications*, Mathematical American Mathematical Society, Mathematical Surveys and Monographs, volume 91, 2002.

Responsable : Roberta Ghezzi

SUJET 17 . **Efficient computation of the Smith normal form of an integer matrix (PMG and MI).**

Résumé : Let A be an $n \times m$ matrix with integer components. The Smith normal form of such a matrix is given by

$$A = UVW,$$

where U is an $n \times n$ integer matrix, W is an $m \times m$ integer matrix and V is a matrix with entries only in the diagonal which are all integers. The Smith normal form is the analog of the *singular value decomposition* for integer matrices.
The standard way to compute the Smith normal form is to use Gauss' algorithm to diagonalise a matrix together with Euklid's algorithm. The problem is that this leads to large numerical factors in the reduction process which quickly (starting from $n, m > 10$) lead to overflow errors. One way to address this problem is via a more astute implementation of Gauss reduction, see (1). The task is to implement the algorithm (1).

Références :

(1) G. Havas and B.S. Majewski, Hermite normal form computation for integer matrices `http://staff.itee.uq.edu.au/havas/TR0295.pdf`.

Responsable : Christian Klein

SUJET 18 . **Geodesics in stationary axisymmetric vacuum spacetimes (PMG and MI).**

Résumé : The vacuum Einstein equations in the stationary axisymmetric case are equivalent to the so-called Ernst equation, which is completely integrable, see (1). The most prominent solution is the Kerr solution describing a rotating black hole. A general class of solutions containing the Kerr solution can be given in terms of multi-dimensional theta functions, a generalization of elliptic functions. The latter describe disks or topological defects.
The task is to study the motion of test particles in these spacetimes, i.e., the geodesics in the spacetimes. The geodesic equations are to be formulated in terms of the Ernst potential. The resulting equations are then to be solved with a standard ODE solver.

Références :

(1) C. Klein and O. Richter, Ernst Equation and Riemann Surfaces, Lecture Notes in Physics Vol. 685 (Springer), 2005.

Responsable : Christian Klein

SUJET 19 . **Grandes matrices aléatoires : autour du théorème de Wigner (PMG et MI).**

Résumé : La théorie des grandes matrices aléatoires est née de ses applications. Elle est apparue au début du 20ème siècle dans le domaine des statistiques et a connue un nouveau dynamisme dans les années 50 par les travaux de Wigner en physique nucléaire. Depuis, la théorie s'est considérablement développée tant pour ses applications que pour ses multiples liens avec de nombreux problèmes mathématiques. L'objectif de ce mémoire est de comprendre le théorème de Wigner. Grossièrement, celui-ci stipule que la mesure spectrale – correctement renormalisée – de matrices aléatoires hermitiennes (à entrées i.i.d.) converge en loi vers la loi du demie-cercle lorsque la taille des matrices croit.

Références :

(1) D. Chafai et F. Malrieu, Recueil de modèles aléatoires (2016).
(2) D. Chafai, Journées X-UPS Introduction aux matrices aléatoires (2013).

Responsable : Yoann Offret.

SUJET 20 . **Algèbres de Lie libres (PMG et MI).**

RÉSUMÉ : Les algèbres de Lie libres sont des objets algébriques qu'on rencontre dans plusieurs domaines des mathématiques tels que, par exemple, la théorie des groupes ou encore la topologie des variétés. En effet, les algèbres de Lie libres y apparaissent naturellement comme “linéarisations” des groupes libres. L'objet du mémoire serait d'étudier la combinatoire des algèbres de Lie libres : notamment, l'étude de leurs bases linéaires (mots de Hall, mots de Lyndon) et le calcul de leurs dimensions en tous degrés (formule de Witt). Concrètement, il s'agirait de lire les premiers chapitres de (1). Éventuellement, l'étudiant(e) pourrait de façon autonome “expérimenter” le contenu théorique du mémoire à l'aide d'un logiciel de calcul formel auquel elle/il serait déjà habitué(e): par exemple le logiciel Mathematica avec le package *FreeLie.m* (2), ou le logiciel Axiom.

RÉFÉRENCES :

(1) C. Reutenauer, *Free Lie algebras.* London Mathematical Society Monographs. New Series, 7. Oxford Science Publications, 1993.
(2) D. Bar-Natan, package Mathematica *FreeLie.m*. Disponible à l'adresse `http://drorbn.net/AcademicPensieve/Projects/WKO4/`.

RESPONSABLE : Gwénaël Massuyeau

SUJET 21 . **Transcendental numbers and e (PMG and MI).**

RÉSUMÉ : (**English**) A real (or complex) number r is called transcendental if for any non-zero polynomial P with rational coefficients satisfies $P(r) \neq 0$. It can be shown that the cardinality of the set of transcendental numbers in $\mathbb{R}$ is uncountable. However, exhibiting concrete examples of transcendental numbers is more delicate. Of particular interest is the fact that e is transcendental (proven in 1873 by Charles Hermite) and that π is transcendental (proven by Carl-Louis-Ferdinand von Lindemann in 1882).
The goal of this project is to study several examples of transcendental numbers, and in particular, to present a proof of the transcendence of e. Moreover, one can describe expressions in terms of continued fractions for e and for e^2.

RÉSUMÉ : (**Français**) Un nombre réel (ou complexe) r est appelé *transcendant* si pour chaque polynôme P non nul avec coefficients rationnels, on a $P(r) \neq 0$. On peut montrer que l'ensemble des éléments transcendants dans $\mathbb{R}$ est indénombrable. Cependant, il est plus difficile d'exhiber des exemples concrets de nombres transcendants. En particulier en 1873, Charles Hermite a démontré que le nombre e est transcendant, et puis en 1882, Carl-Louis-Ferdinand von Lindemann a montré que π est aussi transcendant.
Le but de ce mémoire est d'abord d'étudier plusieurs exemples de nombres transcendants, et en particulier de présenter une démonstration de la transcendance de e. En plus, on peut décrire les nombres e et e^2 en termes des fractions continues.

RÉFÉRENCES :

(1) Irrational numbers, Ivan Niven
(2) Topics in Algebra, Herstein
(3) `https://divisbyzero.com/2010/09/28/the-transcendence-of-e/`
(4) A short proof of the simple continued fraction of e, H. Cohn, The American Mathematical Monthly, 113, No. 1 (Jan. 2006) 57-62
(5) An elegant continued fraction for π, L. J. Lange, The American Mathematical Monthly, 106, No. 5 (May 1999) 456-458
(6) An unusual continued fraction, Badziahin and Shallit, arxiv 1505.00667v1, 2015

RESPONSABLE : Lucy Moser-Jauslin

SUJET 22 . **Étude des solutions de l'équation de la chaleur (PMG et MI).**

RÉSUMÉ : On appelle *équation de la chaleur* linéaire l'équation aux dérivées partielles (EDP) parabolique, du premier ordre en temps t et du second ordre en espace $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\partial_t u(t,x) - \alpha \Delta u(t,x) = 0,$$

où $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j x_j}$ est l'opérateur laplacien en dimension n et α est un nombre réel positif donné.

L'équation de la chaleur, connue aussi sous le nom générique d'équation de diffusion, est très présente en physique. Par exemple, elle décrit l'évolution en temps de la température dans une région de l'espace-temps ou d'une substance chimique dans un liquide immobile contenu dans un tuyau droit. D'un point de vue mathématique, cette équation est le prototype des EDP parabolique du second ordre.
L'objet de ce mémoire est d'analyser les solutions explicites de cette équation et leurs propriétés. Par la suite, on généralisera certains de ces résultats aux EDP paraboliques.

Références :

(1) L.C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, AMS, 2010.
(2) W. A. Strauss. Partial differential equations. An introduction, John Wiley & Sons Inc., New York, 1992.

Responsable : Simona Rota Nodari

SUJET 23 . **Combien de fois faut-il battre un jeu de cartes ? (PMG et MI)**

Résumé : En 1983, D. Aldous et P. Diaconis [2] ont proposé une réponse à la question naturelle suivante: combien de fois faut-il battre un jeu de cartes pour qu'il soit suffisamment mélangé (proche du hasard complet)? Pour cela, ils font correspondre un battage de n cartes à une permutation du groupe $\mathfrak{S}_n$. Ils introduisent, ensuite, une *marche aléatoire sur ce groupe* $(X_k)_{k\geq 0}$ -dont la dynamique Q dépend de la méthode de battage choisie- donnant les états du jeu de carte, initialement ordonné, après des battages successifs.
Une question est alors de mesurer la distance (en variation totale, par exemple) entre la distribution Q^{*k} de X_k et la mesure uniforme U sur $\mathfrak{S}_n$, correspondant à un hasard total à l'intérieur du jeu. Un autre objectif est de définir des critères d'arrêt (*temps d'arrêt uniforme fort* T) permettant d'affirmer que le jeu est proche de cette distribution uniforme. En étudiant les références [1]-[4], on pourra donner une borne sur la *distance en variation totale* entre Q^{*k} et U, faisant intervenir la queue de distribution de T. On s'intéressera ensuite à une formule exacte pour cette distance et à un développement asymptotique de celle-ci. Ces résultats pourront être illustrés par des simulations numériques.
Mots clés: *Marches aléatoires, groupes de permutations, temps d'arrêt, temps d'arrêt uniformes forts, distance en variation totale, combinatoire, développement asymptotique.*

Références :

[1] M. Aigner et G.M. Ziegler, *Proofs from the book* (Chap. 28: Shuffling cards), 2004.
[2] D. Aldous et P. Diaconis, *Shuffling cards and stopping times*, American Math. Monthly, Vol. 93 , p. 333-348, 1983.
[3] D. Bayer et P. Diaconis, *Trailing the Dovetail Shuffle to its Lair*, Vol. 2(2), p. 294-313, 1987.
[4] B. Mann, *Topics in contemporary probability and its applications* (Chap.9: How many times should you shuffle a deck of cards?), 1995.

Responsable : Arnaud Rousselle

SUJET 24 . **Quantum Computing (PMG and MI).**

Résumé : Quantum computers can perform certain tasks much faster than ordinary computers —not because they are simply faster machines, but because bring the fundamental principles of quantum mechanics to bear in a way that ordinary computers cannot emulate. It is not clear whether quantum computers sufficiently large and reliable to be of any practical use will ever exist, but the mathematical theory of certain "quantum algorithms" that could run on them to solve otherwise unsolvable problems is well established. A particular example is Shor's algorithm for factoring integers as a product of primes. Cryptographic protocols in widespread use are based on the infeasability of this task for large numbers; if implemented, Shor's quantum algorithm could be used to break such secret codes.
The goal of the memoir is to understand enough of the basics of quantum computing to understand how Shor's algorithm works, and review the encryption techniques it would break. The topic is certainly suited for a student in the Master program in Mathematical Physics, but a "PMG" student knowing enough quantum mechanics or willing to learn some (no worries, no functional analysis, only finite dimensional Hilbert spaces...) could also cope with it.

RÉFÉRENCES :
(1) P. Shor: Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer; SIAM J.Sci.Statist.Comput. 26 (1997) 1484; `https://arxiv.org/abs/quant-ph/9508027v2`.
(2) P. Kaye, R. Laflamme, M. Mosca: An Introduction to Quantum Computing; Oxford University Press 2007.

RESPONSABLE : Peter Schauenberg

SUJET 25 . **Projective Representations (PMG and MI).**

RÉSUMÉ : A projective representation of a group G differs from an ordinary representation by a small detail: It maps group elements to (say) matrices and preserves the group product, *but only up to scalar factors*. Projective representations are not representations, and thus also not modules over the group algebra (and their "projective characters" are not characters). But they can be viewed as representations by passing to a central group extension, or as modules over a twisted group algebra. The memoir reports these facts alongside the necessary first steps in the cohomology theory of groups, not forgetting a few examples.
The topic is suitable for students in the Mathematical Physics Master (note that odd spin states give rise to projective representations of the rotation group or ordinary representations of its central extension SU(2)), but also interesting for "PMG" students who know about representations of finite groups.

RÉFÉRENCES : This is textbook material, covered for example in chapter 11 of Isaacs' classic on Character Theory of Finite Groups. We can discuss further reading as the memoir progresses.

RESPONSABLE : Peter Schauenberg

SUJET 26 . **Opérateurs compacts, alternatives de Fredholm (PMG et MI).**

RÉSUMÉ : La majorité des espaces vectoriels qui apparaissent en analyse fonctionnelle sont de dimension infinie. L'étude des applications linéaires dans ce contexte est bien plus compliquée en général. Les opérateurs compacts forment une classe d'applications linéaires à la complexité intermédiaire. Sans se résumer au cas de dimension finie, ils en gardent plusieurs propriétés. Le but de ce mémoire est de débuter l'étude de ces opérateurs qui interviennent dans de nombreux contextes en analyse fonctionnelle.

RÉFÉRENCES :
(1) Haim Brezis, Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications.
(2) Francis Hirsch et Gilles Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle.

RESPONSABLE : Johan Taflin

SUJET 27 . **Théorie géométrique des fonctions holomorphes (PMG et MI).**

RÉSUMÉ : De Gauss à Poincaré en passant par Riemann, l'analyse complexe a joué un grand rôle dans l'étude des surfaces. Le but de ce mémoire est d'explorer cette interaction entre fonctions holomorphes, géométrie et topologie. L'étude débutera par des résultats élémentaires mais fondamentaux puis pourra prendre différentes directions : actions de groupes sur le plan complexe ou le demi-plan, analyse fonctionnelle, théorème de représentation conforme de Riemann etc.

RESPONSABLE : Johan Taflin

SUJET 28 . **Théorie des corps et construction à la règle et au compas (PMG).**

RÉSUMÉ : Ce sujet se veut une initiation à la théorie des corps et ses applications. Il s'agira en premier lieu d'étudier les bases de cette théorie (corps de rupture, corps de décomposition, corps finis, etc). Ensuite, on pourra faire une incursion en théorie de Galois, il s'agira alors de comprendre la preuve du théorème fondamental de la théorie de Galois (la fameuse *correspondance de Galois*) et d'étudier des familles d'exemples. Enfin, on pourra considérer des applications de la théorie des corps à la géométrie et comprendre pourquoi la quadrature du cercle, la duplication du cube et la trisection de l'angle sont impossibles à réaliser à la règle et au compas.

Références :
(1) Cours d'algèbre, Daniel Perrin.
(2) Théorie de Galois, Jean-Pierre Escofier.
(3) Géométrie, Michèle Audin.

Responsable : Ronan Terpereau

SUJET 29 . **Représentation du groupe symétrique et tableaux de Young (PMG et MI).**

Résumé : Le groupe symétrique est un objet central en mathématiques et son lien avec les polynômes symétriques jouent un rôle crucial dans divers branches des mathématiques. Dans ce mémoire on se propose d'étudier une approche combinatoire de cette théories à travers les polynômes de Schur et les tableaux de Young. On pourra par exemple s'intéresser à la règle de Littlewood-Richardson qui permet de comprendre comment se décompose le produit de deux représentations irréductibles du groupe symétrique.

Références :
(1) Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence. Laurent Manivel, Cours Spécialisés 3 (1998).
(2) Young Tableaux: With Applications to Representation Theory and Geometry, William Fulton, London Mathematical Society Student Texts.

Responsable : Emmanuel Wagner

SUJET 30 . **The magic square (PMG and MI).**

Résumé : The aim is to understand the relationships between finite subgroups of various classical small Lie groups and learn along the way about representations of groups, quadratic forms and Clifford theory.

Références : The magic square of reflections and rotations, by Buchweitz, Faber and Ingalls.

Responsable : Emmanuel Wagner

SUJET 31 . **2D TQFT and Frobenius algebras (PMG and MI).**

Résumé : The memoir will investigate a beautiful relationship between topology and algebra. In particular how topology can lead to a very nice algebraic structure: a Frobenius algebra, i.e. an algebra endowed with a non degenerate linear form. The subject will be an excuse to learn also about category theory and Morse theory.

Références : 2D TQFT and Frobenius algebras, by Kock.

Responsable : Emmanuel Wagner

SUJET 32 . **Homologie de Morse (PMG et MI).**

Résumé : Les théories homologiques sont au coeur du développements de la topologie algébrique et de la géométrie algébrique. Le but de ce mémoire est de développer le cadre formel d'algèbre linéaire dans lequel peuvent se développer ces théories et ensuite d'étudier un cas particulier, l'homologie de Morse. Celle-ci peut être vu comme un outil algébrique permettant d'étudier des objets topologiques. On pourra par exemple appliquer cette théorie pour comprendre la classification des surfaces.

Références : Théorie de Morse et Homologie de Floer, par Audin et Damian.

Responsable : Emmanuel Wagner