## À lire attentivement : consignes pour les étudiants en M1 MEEF et M1 PMG

### Types de sujet

On distingue deux types de sujet : les sujets pour des mémoires de recherche (**adressés aux étudiant.e.s de PMG, à faire individuellement**) et les sujets pour des mémoires de vulgarisation (**adressés aux étudiant.e.s de MEEF, à faire en binômes**). Si un.e étudiant.e de MEEF souhaite faire un mémoire de recherche plutôt qu'un mémoire de vulgarisation, une dérogation pourra lui être accordée après étude de son dossier. En revanche les étudiant.e.s de la filière PMG ont obligation de faire un mémoire de recherche.

Pour les mémoires de vulgarisation, le travail demandé au binôme sera la rédaction d'un article de vulgarisation de 3-4 pages (dont le contenu mathématique doit être accessible à un.e étudiant.e de Licence) et une soutenance de 15 minutes (suivie par 10 minutes de questions) où le contenu de l'exposé sera en lien avec l'article de vulgarisation mais aura un contenu mathématique qui pourra par exemple être un cas particulier de la théorie mathématique divulguée dans l'article ou la preuve détaillée d'un résultat de la théorie. La soutenance ne sera pas un exposé de vulgarisation qui reprendrait le contenu de l'article de vulgarisation et les étudiant.e.s devront montrer leur capacité à présenter un exposé avec des concepts mathématiques avancés.

Pour les mémoires de recherche des étudiant.e.s PMG, le travail demandé à chaque étudiant.e sera la rédaction d'un rapport d'environ 20-30 pages en Latex au format 11pt et une soutenance de 25 minutes (suivie de 15 minutes de questions) devra démontrer que les étudiant.e.s maîtrisent les mathématiques contenues dans le mémoire.

Pour chaque sujet proposé, les étudiant.e.s peuvent trouver le titre, le public visé (PMG ou MEEF), le nom de l'enseignant.e responsable, un résumé et des références. N'hésitez pas à contacter le/la responsable d'un sujet afin d'avoir des idées plus précises sur le travail attendu. **Notez cependant que cette prise de contact ne garantit en rien le fait que ce sujet vous sera attribué.**

### Remise des choix

Chaque étudiant.e PMG/binôme d'étudiant.e.s MEEF doit choisir au moins 4 sujets dans la liste ci-dessous et les classer par ordre de préférence. Ensuite chaque étudiant.e/binôme doit envoyer sa liste de sujets par courrier électronique avant le **vendredi 27 novembre**. Vous pouvez éventuellement préciser vos motivations pour ces choix. Notez que les affectations, qui seront décidées par le responsable des mémoires de Master 1 MEEF-PMG (Ronan TERPEREAU), ne se feront pas sur le critère du "premier arrivé, premier servi".

### Liste d'affectation des sujets

La liste affectant à chaque étudiant.e/binôme d'étudiant.e.s un sujet sera communiquée aux étudiant.e.s concerné.e.s au plus tard le vendredi 04 décembre.

### Soutenance

Chaque étudiant.e/binôme d'étudiant.e.s devra :

(1) envoyer au responsable des mémoires par courrier électronique la version finale de son rapport au format PDF au plus tard deux jours avant la soutenance ;
(2) rendre trois exemplaires d'un **rapport écrit** le jour de la soutenance ; et
(3) effectuer un **exposé oral de 15/25 minutes** devant un jury de trois enseignant.e.s (dont l'encadrant.e et le responsable des mémoires). La soutenance est **obligatoire** même pour les étudiant.e.s n'ayant rien fait. Un rétroprojecteur et un vidéo-projecteur seront à votre disposition.

Le calendrier précis des soutenances (prévues les 4-5 mai 2021) vous sera communiqué ultérieurement.

### Responsable

Ronan TERPEREAU, bureau A328, ronan.terpereau@u-bourgogne.fr.

## Sujets pour les mémoires de vulgarisation (MEEF)

SUJET 1 . **Nombres rationnels, algébriques, transcendants. Approximation Diophantienne, mesure d'irrationalité.**

*Mots-clefs :* histoire, exemples, usage des fractions continues, points de vue du cardinal et de la mesure.

Référence(s) :

(1) Y. Bugeaud, Approximation by algebraic numbers, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 160, Cambridge University Press, Cambridge, 2004
(2) Michel Waldschmidt, Introduction to Diophantine methods irrationality and transcendence `http://webusers.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/articles/pdf/IntroductionDiophantineMethods.pdf`

Responsable : Olivier Couture

---

SUJET 2 . **L'Analyse au service de l'Algèbre : le Théorème Fondamental de l'Algèbre (MEEF).**

Résumé : Le Théorème Fondamental de l'Algèbre, ou Théorème de d'Alembert-Gauss, établit que tout polynôme non constant, à coefficients complexes, admet au moins une racine. Quelles sont les différentes stratégies pour prouver ce théorème ? En existe-t-il qui ne font pas appel à l'Analyse ? Qu'est-ce que l'Optimisation et comment permet-elle une démonstration élémentaire de ce résultat ?

Référence(s) :

(1) E. FIEUX, P. LASSERRE, F. RODRIGUEZ. Approches analytiques du théorème de d'Alembert-Gauss : un bestiaire. Revue des mathématiques de l'enseignement supérieur numéro 117-1 (2006), p. 19-29.
(2) J.-B. HIRIART-URRUTY. Le théorème fondamental de l'algèbre : Une démonstration par le calcul différentiel et l'optimisation. Bulletin de l'APMEP numéro 466 (2006), p. 695-698.

Responsable : Xavier Dupuis

---

SUJET 3 . **Le groupe monstre (MEEF).**

Résumé : Le groupe monstre est le plus gros des groupes simples sporadiques. Dans le but de classifier les groupes finis, traditionnellement on se restreint aux groupes "simples", n'ayant aucun sous groupe normal non trivial. Ces groupes forment 18 de familles infinies, auxquelles s'ajoutent 26 groupes sporadiques. Le plus gros parmi ces derniers est appelé le monstre. Il a cardinal $2^4 6 * 3^2 0 * 5^9 * 7^6 * 11^2 * 13^3 * 17 * 19 * 23 * 29 * 31 * 41 * 47 * 59 * 71$, ce qui équivaut plus ou moins à $8 * 10^5 3$.
Dans ce mémoire on étudiera l'histoire de la classification des groupes finis et en particulier du groupe monstre.

Référence(s) : Martin Gardner, "The Last Recreations", Springer-Verlag 1997, chapitre 9, "The Monster and Other Sporadic Groups", livre disponible sur SpringerLink en pdf.

Responsable : Daniele Faenzi

---

SUJET 4 . **Modèles de fractales dans la nature (MEEF).**

Résumé : Les formes fractales sont des modèles mathématiques hautement symétriques. On a beau les tourner et les retourner dans tous les sens suivant certains angles, on retrouve toujours la même forme. Plus fort encore, si on les observe avec une loupe aussi puissante que l'on veut, on retrouve à nouveau les mêmes images ! Ces formes sont donc invariantes par l'action d'un certain nombre d'opérations. C'est ce que l'on appelle communément en mathématique, des points fixes de transformations du plan ou de l'espace. Ces objets tout autant artistiques que mathématiques ont été introduits récemment en 1982 dans le célèbre mathématicien Benoit Mandelbrot. Un des principaux objectifs de ce projet est de construire des processus d'exploration aléatoires convergeant vers des images fractales symétriques.

Référence(s) : P. Del Moral and C. Vergé, Modèles et méthodes stochastiques, 2014.

Responsable : Samuel Hermann

SUJET 5 . **Poincaré ou la non-fabrique du sandwich (MEEF).**

RÉSUMÉ : En 1895, Poincaré fait paraître au Journal de l'École Polytechnique un mémoire intitulé Analysis Situs. Ce mémoire révolutionnaire pose les fondements d'un nouveau domaine des mathématiques que nous appelons aujourd'hui la "topologie algébrique". Rappelons que $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ désigne la sphère de dimension $n$. Une application de cette théorie est le théorème de Borsuk-Ulam qui dit que toute fonction continue $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ admet un point $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$. Le théorème du sandwich au jambon quand à lui dit que l'on peut couper en quantités égales, d'un seul coup de couteau, le jambon, le fromage et le pain d'un sandwich. Ce théorème découle directement du théorème de Borsuk-Ulam. Il est parfaitement inutile car ne dit pas comment trouver la coupe, mais cette histoire vaut la peine d'être racontée, et ce sera le but de ce mémoire.

RESPONSABLE : Luis Paris

---

SUJET 6 . **De la combinatoire à la géométrie des groupes (MEEF).**

RÉSUMÉ : En 1912 Max Dehn pose les bases de la théorie combinatoire des groupes en posant trois questions fondamentales. La première, connue sous le nom de "problème du mot ", est la suivante. On se donne un groupe de type fini engendré par un ensemble fini donné. Existe-t-il un algorithme qui, étant donné deux mots en les générateurs et leur inverses, détermine si ces mots représentent le même élément du groupe ou pas ? On dit dans ce cas que le groupe muni de sa famille génératrice a une solution au problème du mot. 65 ans plus tard, en 1987, Mikhaïl Gromov révolutionne le domaine avec sa théorie des groupes hyperboliques, qui est le fondement de la théorie géométrique des groupes, domaine mathématique extrêmement actif en ce moment. L'idée géniale de cet homme fut de montrer que tout groupe de type fini peut être muni d'une métrique et que des conditions sur cette métrique induisent des propriétés algébriques sur le groupe. En particulier, les groupes hyperboliques ont une solution au problème du mot.
Le but du travail proposé est de raconter cette histoire, celle des mathématiciens, Dehn et Gromov en premier lieu, mais aussi celle des mathématiques qu'ils ont créées.

RESPONSABLE : Luis Paris

---

SUJET 7 . **Propagation d'une infection (MEEF).**

RÉSUMÉ : Étant donné un graphe fini et une règle détermiste de propagation d'une infection sans guérison, quel est le nombre minimal de sommets initialement infectés permettant d'infecter finalement l'intégralité du graphe ? Voici le point de départ de ce mémoire. Par exemple, donnons nous un réseau planaire carré $n \times n$ et la règle de contagion suivante : un sommet devient infecté au temps $t + 1$ si deux (au moins) de ses voisins le sont au temps $t$. Le nombre minimal de sommets initialement infectés permettant de contaminer l'intégralité de la grille est $n$, comme expliqué dans le Problème 34 de [1]. On pourra s'intéresser également à des variantes de cette questions correspondant aux Problèmes 35 (réseau $d-$dimensionnel, 2 voisins), 65 (réseau $2-$dimensionnel, 3 voisins) ou 66 (sur le tore $2-$dimensionnel).
Pour aller plus loin et en guise d'ouverture, on pourra décrire et s'intéresser aux premières propriétés d'un processus de propagation d'épidémie faisant entrer en jeu le hasard : le *processus de contact*. Dans celui-ci, un site infecté redevient sain après un temps aléatoire, distribué selon une loi exponentielle de paramètre 1 alors qu'un site sain est infecté après un temps exponentiel de paramètre proportionnel au nombre de ses voisins déjà infectés. On pourra pour cela consulter, par exemple, l'article de survol de Richard Durrett constituant le premier chapitre de [2].

RÉFÉRENCE(S) :

(1) B. Bollobás. The Art of Mathematics : Coffee Time in Memphis. Cambridge University Press, 2006.
(2) W. E. Kohler and B.S. White. Mathematics of Random Media, volume 27 of Lectures in Applied Mathematics. AMS, 1991.

RESPONSABLE : Arnaud Rousselle

SUJET 8 . **La constante de Mills.** ***Sous-titre : les "machines" à construire des nombres premiers*** **(MEEF).**

Résumé : On sait depuis longtemps que les nombres premiers constituent la "colonne vertébrale" des nombres entiers. De nos jours, les recherches sur les propriétés et les applications des nombres premiers sont encore très actives. Ainsi, les mathématiciens se sont naturellement demandés s'il existe des fonctions explicites "raisonnables" dont les valeurs seraient exclusivement faites de nombres premiers. Au cours des siècles, plusieurs réponses ont été données, plus ou moins satisfaisantes.
Le propos de ce mémoire est d'explorer certaines de ces réponses, et notamment l'une d'elles, particulièrement originale, basée sur une constante réelle : la constante de Mills.

Responsable : Jean-Philippe Rolin

---

SUJET 9 . **Minimisation de la norme $l_1$ : problèmes d'optimisation, poursuite de base et LASSO (MEEF).**

Résumé : Les méthodes poursuite de base et LASSO sont des problèmes d'optimisation qui interviennent dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées : l'acquisition comprimée, la statistique en grande dimension, l'apprentissage statistique... Bien que ces problèmes soient étudiés depuis environ 20 ans (les articles fondateurs introduisant ces méthodes sont ceux de Tibshirani et Chen-Donoho-Saunders ci-dessous), la recherche fondamentale et appliquée en lien avec ces deux problèmes d'optimisation est actuellement extrêmement active (chaque année des centaines d'articles de recherche en lien avec ces méthodes sont publiés).
L'objectif de ce projet est d'écrire un article de vulgarisation qui permettrait au lecteur (par exemple un enseignant certifié en mathématiques) d'appréhender ces problèmes d'optimisation et de découvrir les applications de ces méthodes à des données réelles (pour des applications, voir par exemple les livres de Hastie-Tibshirani-Wainwright et de Foucart-Rauhut).

Référence(s) :

(1) Scott Shaobing Chen, David L Donoho, and Michael A Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM review*, 43(1):129–159, 2001.
(2) Simon Foucart and Holger Rauhut. *A mathematical introduction to compressive sensing*, volume 1. Springer, 2013.
(3) Trevor Hastie, Robert Tibshirani, and Martin Wainwright. *Statistical learning with sparsity: the lasso and generalizations*. CRC press, 2015.
(4) Robert Tibshirani. Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 58(1):267–288, 1996.

Responsable : Patrick Tardivel

---

SUJET 10 . **Bulles de savons, surfaces minimales et réseaux de longueur minimale (MEEF).**

Le *problème de Plateau* (posé par Joseph-Louis Lagrange en 1760, mais qui porte le nom de Joseph Plateau, qui s'intéressait aux bulles de savon) est le suivant :
*Étant donné un bord homéomorphe à un cercle, est-ce qu'il existe une surface d'aire minimale s'appuyant sur ce bord ?*
Il fut résolu par Jesse Douglas qui a reçu la médaille Fields en 1936 pour ce travail.
Un autre problème lié aux bulles de savon (même si ça ne saute pas aux yeux), *le problème de Steiner*, est le suivant :
*Étant donnés $n$ points fixés dans le plan, quel est le réseau de longueur minimal les reliant tous ?*

Le but de ce mémoire est de produire un article de vulgarisation qui raconte l'histoire de ces deux problèmes et leur lien avec les bulles de savon.

Responsable : Ronan Terpereau

SUJET 11 . **Nombres $p$-adiques et équations diophantiennes (MEEF).**

RÉSUMÉ : Une équation diophantienne est une équation polynomiale dont les coefficients sont entiers. On en cherche des solutions entières. Par exemple, par le théorème de Bézout, on sait que l'équation $ax+by=1$ a des solutions entières si et seulement si $a$ et $b$ sont premiers entre eux. Pour les équations de degré 2 ou plus, la résolution devient plus compliquée. Une méthode pour déterminer l'existence d'une solution est de chercher des solutions modulo un nombre premier, ou, plus généralement, de travailler avec les nombres $p$-adiques. Pour les équations homogènes de degré 2, le principe de Hasse donne une méthode pour déterminer si une telle équation a des solutions.
Le but de ce mémoire est d'étudier la construction des nombres $p$-adiques et de comprendre comment les utiliser pour déterminer l'existence des solutions pour quelques équations diophantiennes.

RÉFÉRENCE(S) :

(1) "Number Theory I", H. Cohen, GTM 239 Springer
(2) `http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/96025032.pdf`
(3) `http://webusers.imj-prg.fr/~pierre.colmez/nombres-p-adiques.pdf`
(4) `http://www.math.u-bordeaux1.fr/~pchretie/seminaire/notes/AbouzaidHasse.pdf`

RESPONSABLE : Lucy Moser-Jauslin

SUJET 12 . **Le problème du carré inscrit (PMG).**

Résumé : Étant donné une courbe fermée continue dans le plan, peut-on trouver 4 points sur cette courbe qui forment un carré ? Un rectangle ? Un rectangle de ratio donné $r$ où $r > 0$ ? C'est le problème du carré (et du rectangle) inscrit. Dans le cas du carré, c'est une conjecture énoncée par Toeplitz en 1911, mais résolue sous diverses hypothèses de régularité de la courbe, par exemple si la courbe est $C^2$ par Schnirelman.
Pour le cas du rectangle, un argument due à Vaughan montre que toute courbe fermée admet un rectangle inscrit, en reliant le problème à l'inexistence d'un plongement du plan projectif $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Référence(s) :

(1) B. Matschke *A survey of the square peg problem*, Notices of the AMS, Volume 61 Number 4
(2) (2)M. D. Meyerson *Balancing arts*, *Topology Proc.* Vol 6 (1981), no. 1, 59-75.

Responsable : Renaud Detcherry

---

SUJET 13 . **Flèches, carquois et théorème de Gabriel (PMG).**

Résumé : Un *carquois* est une collection de flèches joignant des couples de points. En ce sens, il s'agit d'un graphe orienté, mais la notion intervient en physique théorique ainsi qu'en théorie des représentations, des groupes et des catégories de manière naturelle. (Le nom "carquois" provient du fait qu'il s'agit essentiellement d'une collection de flèches.)

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, "h"'] \arrow[r, bend left, "x"] \arrow[r, "y"] \arrow[r, bend right, "z"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

Si $Q$ est un carquois, une *représentation* de $Q$ est un foncteur $F(Q) \to \text{Vect}$ de la catégorie libre engendrée par $Q$ dans la catégorie des espaces vectoriels. Autrement dit, on associe à chaque sommet de $Q$ un espace vectoriel et à chaque flèche une application linéaire. Le but de ce mémoire est d'apprendre les bases de la théorie des représentations des carquois et de comprendre la preuve du *théorème de Gabriel*, démontré par Pierre Gabriel en 1972, qui permet de classer les carquois de type fini en termes de certains diagrammes appelés *diagrammes de Dynkin*.

Référence(s) :

(1) Partie 1 du livre "Quiver representations and quiver varieties", par Alexander Kirillov.
(2) Notes d'une école d'été "`https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/notes_quivers_rev.pdf`", par Michel Brion.

Responsable : Ronan Terpereau

---

SUJET 14 . **Mathématiques tropicales et applications (PMG).**

Résumé : Les mathématiques *tropicales* sont une branche des mathématiques dans laquelle on étudie les polynômes et leurs propriétés géométriques lorsque l'addition $a + b$ est remplacée par $\min(a, b)$ et la multiplication $a * b$ est remplacée par $a + b$. Par exemple le polynôme $x^3 + 2xy + y^4$ devient $\min\{x + x + x,\ 2 + x + y,\ y + y + y + y\}$.
Ces polynômes *tropicaux*, et leurs solutions, ont des applications importantes dans diverses branches des mathématiques, par exemple dans des problèmes d'optimisation. Ainsi, pour calculer la longueur d'un plus court chemin d'un sommet à un autre dans un graphe à $n$ sommets, il suffit de calculer la puissance $n$-ème tropicale de la matrice d'adjacence du graphe.
Dans ce mémoire on propose à l'étudiant.e une introduction aux mathématiques tropicales et à leurs applications.

Référence(s) :

(1) Livre "Introduction to Tropical Geometry", de Diane Maclagan et Bernd Sturmfels.
(2) `http://antoine.delignat-lavaud.fr/doc/tropical.pdf`

Responsable : Ronan Terpereau

SUJET 15 . **Paradoxe de Banach-Tarski (PMG).**

RÉSUMÉ : Le but du mémoire est d'étudier certaines pathologies en théorie de la mesure. Une des plus paradoxales d'entre elles vient du théorème de Banach-Tarski : il existe une manière de découper une boule en 5 morceaux tels qu'en les recollant différemment, on obtienne deux boules identiques à la première. Sa preuve repose en grande partie sur la théorie des groupes et le mémoire pourra être l'occasion d'étudier et de construire (à la main, géométriquement ou encore topologiquement) des groupes libres.

RÉFÉRENCE(S) :

(1) Livre "The Banach-Tarski Paradox", de Stan Wagon.
(2) Article "Arbres, amalgames, SL2", de Jean-Pierre Serre
(disponible en ligne : `http://www.numdam.org/issue/AST_1983__46__1_0.pdf`)

RESPONSABLE : Johan Taflin

---

SUJET 16 . **Marches aléatoires sur les graphes, Théorème de Perron-Frobenius (PMG).**

RÉSUMÉ : Les marches aléatoires sur les graphes sont un domaine des probabilités très riches qui a trouvé beaucoup d'applications en informatique, physique, biologie, science sociale e.t.c. L'objectif de ce mémoire sera tout d'abord de comprendre ces objets en tant que tels puis plus particulièrement de démontrer le Théorème de Perron-Frobenius dans le cas d'un réseau fini. Celui-ci stipule que la loi d'une marche aléatoire se stabilise vers la mesure de probabilité invariante sous de bonnes conditions. On pourra ensuite élargir l'étude au théorème ergodique, aux marches aléatoires à entropie maximale ou à bien d'autres choses. Des simulations de ces processus et des illustrations de ces résultats seront appréciés.

RESPONSABLE : Yoann Offret

---

SUJET 17 . **Minimisation de la norme $l_1$ : solutions parcimonieuses d'un système linéaire d'équations (PMG).**

RÉSUMÉ : Un système linéaire d'équations peut avoir $0, 1$ ou une infinité de solutions. Dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées, par exemple l'acquisition comprimée (voir par exemple le livre de Foucart et Rauhut), il est pertinent de déterminer une solution du système ayant un nombre de composantes non-nulles minimal. En toute généralité, ce problème est NP-ardu donc difficile à résoudre numériquement. Néanmoins, la méthode poursuite de base qui consiste à minimiser la norme $l_1$ parmi les solutions du système est un problème d'optimisation convexe, facile à résoudre numériquement et qui donne des solutions parcimonieuses (*i.e* certaines composantes sont nulles). De plus, sous certaines conditions, les solutions du problème poursuite de base sont également les solutions les plus parcimonieuses. L'objectif de ce projet est d'étudier les conditions sous lesquelles la méthode poursuite de base fournit les solutions les plus parcimonieuse d'un système linéaire d'équations.

RÉFÉRENCE(S) : *A mathematical introduction to compressive sensing*, de Simon Foucart and Holger Rauhut. Volume 1. Springer, 2013.

RESPONSABLE : Patrick Tardivel

---

SUJET 18 . **Projective Representations (PMG).**

RÉSUMÉ : A projective representation of a group $G$ differs from an ordinary representation by a small detail: It maps group elements to (say) matrices and preserves the group product, *but only up to scalar factors.* Projective representations are not representations, and thus also not modules over the group algebra (and their "projective characters" are not characters). But they can be viewed as representations by passing to a central group extension, or as modules over a twisted group algebra. The memoir reports these facts alongside the necessary first steps in the cohomology theory of groups, not forgetting a few examples.
The topic is suitable for students in the Mathematical Physics Master (note that odd spin states give rise to projective represenations of the rotation group or ordinary representations of its central extension SU(2)), but also interesting for "PMG" students who know about representations of finite groups.

RÉFÉRENCE(S) : This is textbook material, covered for example in chapter 11 of Isaacs' classic on Character Theory of Finite Groups. We can discuss further reading as the memoir progresses.

RESPONSABLE : Peter Schauenburg

SUJET 19 . **Combien de fois faut-il battre un jeu de cartes ? (PMG)**

RÉSUMÉ : En 1983, D. ALDOUS et P. DIACONIS [2] ont proposé une réponse à la question naturelle suivante: combien de fois faut-il battre un jeu de cartes pour qu'il soit suffisamment mélangé (proche du hasard complet) ? Pour cela, ils font correspondre un battage de $n$ cartes à une permutation du groupe $\mathfrak{S}_n$. Ils introduisent, ensuite, une *marche aléatoire sur ce groupe* $(X_k)_{k\geq 0}$ -dont la dynamique $Q$ dépend de la méthode de battage choisie- donnant les états du jeu de carte, initialement ordonné, après des battages successifs.
Une question est alors de mesurer la distance (en variation totale, par exemple) entre la distribution $Q^{*k}$ de $X_k$ et la mesure uniforme $U$ sur $\mathfrak{S}_n$, correspondant à un hasard total à l'intérieur du jeu. Un autre objectif est de définir des critères d'arrêt (*temps d'arrêt uniforme fort* $T$) permettant d'affirmer que le jeu est proche de cette distribution uniforme. En étudiant les références [1]-[4], on pourra donner une borne sur la *distance en variation totale* entre $Q^{*k}$ et $U$, faisant intervenir la queue de distribution de $T$. On s'intéressera ensuite à une formule exacte pour cette distance et à un développement asymptotique de celle-ci. Ces résultats pourront être illustrés par des simulations numériques.
**Mots clés:** *Marches aléatoires, groupes de permutations, temps d'arrêt, temps d'arrêt uniformes forts, distance en variation totale, combinatoire, développement asymptotique.*

RÉFÉRENCE(S) :

[1] M. AIGNER et G.M. ZIEGLER, *Proofs from the book* (Chap. 28: Shuffling cards), 2004.
[2] D. ALDOUS et P. DIACONIS, *Shuffling cards and stopping times*, American Math. Monthly, Vol. 93 , p. 333-348, 1983.
[3] D. BAYER et P. Diaconis, *Trailing the Dovetail Shuffle to its Lair*, Vol. 2(2), p. 294-313, 1987.
[4] B. MANN, *Topics in contemporary probability and its applications* (Chap.9: How many times should you shuffle a deck of cards?), 1995.

RESPONSABLE : Arnaud Rousselle

---

SUJET 20 . **Séries aléatoires de Fourier (PMG).**

RÉSUMÉ : On étudira les séries aléatoires de fonctions suivantes

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\zeta_n\, e^{int}, \quad t\in\mathbb{R}$$

où l'ensemble $\{a_n \in \mathbb{C}\ ;\ n\in\mathbb{Z}\}$ sont les coefficients complexes, les $\zeta_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivants une même loi. Deux exemples importants seront traités:

(i) Les $\zeta_n$ suivent la loi de Rademacher :

$$\mathbb{P}(\zeta_n = 1) = \mathbb{P}(\zeta_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

(ii) Les $\zeta_n$ suivent la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Cette étude pourra être complétée par une simulation numérique.

RÉFÉRENCE(S) : "Some random series of functions", de Jean-Pierre Kahane. Second edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 5. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

RESPONSABLE : Shizan Fang

SUJET 21 . **Spectraèdres (PMG).**

RÉSUMÉ : Les spectraèdres apparaissent en programmation semidéfinie positive et ont des applications aux sciences de l'ingénieur (aérospatiale, mécanique).
Qu'est-ce qu'un spectraèdre au juste ? D'abord, on se donne une matrice symétrique $A$ dont les coefficients dépendent de façon linéaire du point $x$ de $\mathbb{R}^n$. Ensuite, le spectraèdre est l'ensemble des points $x$ tels que $A$ est semidéfinie positive. Les spectraèdres sont donc des régions de l'espace définies par des inégalités polynomiales, qui ont des propriétés étonnantes de convexité et de rigidité.
Dans ce mémoire on étudiera ces objets et quelques uns des théorèmes qui les concernent en particulier dans le cas des spectraèdres de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.

RÉFÉRENCE(S) :

(1) John Christian Ottem, Kristian Ranestad, Bernd Sturmfels, Cynthia Vinzant, "Quartic Spectrahedra", arXiv:1311.3675
(2) Pablo A. Parrilo, "Semidefinite Optimization", Semidefinite Optimization and Convex Algebraic Geometry, MOS-SIAM Series on Optimization, Volume 13, 2012
(3) Tim Netzer, "Spectrahedra and Their Shadows", Habilitationsschrift (Universität Leipzig), 2011

RESPONSABLE : Daniele Faenzi

---

SUJET 22 . **Nombres $p$-adiques et équations diophantiennes (PMG).**

RÉSUMÉ : Une équation diophantienne est une équation polynomiale dont les coefficients sont entiers. On en cherche des solutions entières. Par exemple, par le théorème de Bézout, on sait que l'équation $ax + by = 1$ a des solutions entières si et seulement si $a$ et $b$ sont premiers entre eux. Pour les équations de degré 2 ou plus, la résolution devient plus compliquée. Une méthode pour déterminer l'existence d'une solution est de chercher des solutions modulo un nombre premier, ou, plus généralement, de travailler avec les nombres $p$-adiques. Pour les équations homogènes de degré 2, le principe de Hasse donne une méthode pour déterminer si une telle équation a des solutions.
Le but de ce mémoire est d'étudier la construction des nombres $p$-adiques et de comprendre comment les utiliser pour déterminer l'existence des solutions pour quelques équations diophantiennes.

RÉFÉRENCE(S) :

(1) "Number Theory I", H. Cohen, GTM 239 Springer
(2) `http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/96025032.pdf`
(3) `http://webusers.imj-prg.fr/~pierre.colmez/nombres-p-adiques.pdf`
(4) `http://www.math.u-bordeaux1.fr/~pchretie/seminaire/notes/AbouzaidHasse.pdf`

RESPONSABLE : Lucy Moser-Jauslin