À lire attentivement

Liste des sujets

Les étudiants inscrit en MEEF feront leur mémoire en binôme alors que les mémoires des étudiants inscrits en MA/PMG seront individuels. Certains sujets sont fléchés pour les binômes suivant le MEEF, ils ne pourront donc être choisi par les étudiants suivant le MA. Les étudiants inscrits en MEEF pourront quant à eux choisir parmi tous les sujets proposés.

Pour les sujets fléchés "vulgarisation" le travail demandé sera la rédaction d'un article de vulgarisation d'environ 4 pages et une soutenance où le contenu de l'exposé sera en lien avec l'article de vulgarisation mais aura un contenu mathématique qui pourra par exemple être un cas particulier de la théorie mathématique divulguée dans l'article. La soutenance ne sera pas un exposé de vulgarisation qui reprendrai le contenu de l'article de vulgarisation. Les autres mémoires devront être d'environ 20 pages en Latex au format 11pt et la soutenance devra démontrer que les étudiants maîtrisent les mathématiques contenues dans le mémoire.

Pour chaque sujet proposé, la liste précise le titre, le nom de l'enseignant responsable, le résumé et des références. N'hésitez pas à contacter le responsable d'un sujet afin d'avoir des idées plus précises sur le travail attendu. **Notez cependant que cette prise de contact ne garantit en rien le fait que ce sujet vous sera attribué.**

Remise des choix

Chaque binôme ou chaque étudiant doit choisir au moins 6 sujets dans la liste et les classer par ordre de préférence. Ensuite chaque binôme ou chaque étudiant doit m'envoyer sa liste de six sujets par courrier électronique avant le **lundi 27 novembre**. Vous pouvez éventuellement préciser vos motivations pour ces choix. Notez que les affectations ne se feront pas sur le critère du “premier arrivé, premier servi”.

Liste d'affectation des sujets

Une liste affectant à chaque binôme ou chaque étudiant un sujet sera affichée sur le panneau d'affichage des Masters.

Soutenance

Chaque binôme ou étudiant doit :

(1) effectuer un **exposé oral de 20 minutes** devant un jury de trois enseignants. La soutenance est **obligatoire** même pour les binômes n'ayant rien fait. Un rétroprojecteur et un vidéo-projecteur seront à votre disposition.
(2) rendre trois exemplaires d'un **rapport écrit** le jour de la soutenance,
(3) m'envoyer par courrier électronique la version finale de son rapport au format PDF.

Je vous indiquerai ultérieurement les dates de soutenances (prévues en mai 2018).

Responsable

R. Terpereau, bureau 326, ronan.terpereau@u-bourgogne.fr.

Sujets de Vulgarisation

SUJET 1 . Le nombre π au pays de l'aléa.

Résumé : Le nombre π présente de nombreuses propriétés bien souvent subtiles et parfois étonnantes. Après avoir présenté quelques unes de ces propriétés, il s'agira d'établir le lien entre le nombre π et certains phénomènes aléatoires apparaissant par exemple dans les jeux de pile ou face. Finalement on s'intéressera aux méthodes aléatoires d'approximation du nombre π.

Références :

(1) "Autour du nombre pi" de P. Eymard. Article de vulgarisation.
(2) "Processus de Markov et Applications" E. Pardoux.
(3) "Les méthodes de Monte-Carlo" J.M. Hammersley et D.C. Handscomb .
(4) "Golden ratio versus pi as random sequence sources for Monte Carlo integration" Sen, Agarwal et Shaykhian.

Responsable : S. Hermann.

SUJET 2 . Comment gérer l'aléa sur les marchés financiers.

Résumé : Quand il s'agit d'investir un capital en bourse, on se trouve face à un univers dominé par l'aléatoire et l'incertain. Malgré tout, il faut être capable d'établir des stratégies d'investissements qui soient fondées sur des calculs précis... Alors comment maîtrise la notion d'aléa en finance ? On essaiera de comprendre comment construire un modèle mathématique pour la finance quantitative.

Références :

(1) Introduction to mathematical finance. S.R. Pliska.
(2) "Investments" collection Que sais-je ? de M. Rockinger.

Responsable : S. Hermann

SUJET 3 . Modèles de fractales dans la nature.

Résumé : Les formes fractales sont des modèles mathématiques hautement symétriques. On a beau les tourner et les retourner dans tous les sens suivant certains angles, on retrouve toujours la même forme. Plus fort encore, si on les observe avec une loupe aussi puissante que l'on veut, on retrouve à nouveau les mêmes images ! Ces formes sont donc invariantes par l'action d'un certain nombre d'opérations. C'est ce que l'on appelle communément en mathématique, des points fixes de transformations du plan ou de l'espace. Ces objets tout autant artistiques que mathématiques ont été introduits récemment en 1982 dans le célèbre mathématicien Benoit Mandelbrot. Un des principaux objectifs de ce projet est de construire des processus d'exploration aléatoires convergeant vers des images fractales symétriques.

Références :

(1) P. Del Moral and C. Vergé, Modèles et méthodes stochastiques, 2014.

Responsable : S. Hermann

SUJET 4 . Le nombre d'or.

Résumé : Le but de ce mémoire est d'étudier plusieurs aspects du nombre d'or (histoire, fractions continues, suite de Fibonacci, etc.).

Références :

(1) "Le nombre d'or : Le langage mathématique de la beauté", Fernando Corbalanm.
(2) "Concrete Mathematics", R. Graham, D. Knuth et O. Patashnik.

Responsable : L. Moser-Jauslin

Sujets Classiques ou de Vulgarisation

Les sujets suivants peuvent aussi bien faire l'objet d'un mémoire de vulgarisation que d'un mémoire classique.

SUJET 5 . **Objets convexes de largeur constante.**

Résumé : Un disque a la propriété géométrique d'être de largeur constante : la distance entre deux droites parallèles tangentes à celui-ci reste constante (égale au diamètre du disque). Il existe une grande panoplie d'autres objets convexes du plan qui possèdent cette propriété ; ces objets de largeur constante (ou orbiformes) ont reçu une certaine attention de la part des mathématiciens au 19e et au 20e siècle (Minkowski, Lebesgue, Blaschke, Hurwitz, etc.) et un grand nombre de résultats ont été obtenus. Par exemple, tous les objets convexes de largeur constante (fixée) ont le même périmètre ; parmi eux le disque possède l'aire maximale et le triangle de Reuleaux l'aire minimale (inférieure d'environ 10 %) ; etc.
Le mémoire pourra couvrir
- des aspects historiques et mécaniques des objets convexes de largeur constante ;
- la preuve de certains résultats par des techniques modernes (calcul des variations, contrôle optimal) ;
- des généralisations des objets convexes de largeur constante (rotors en 2D, objets convexes d'épaisseur constante ou shéroformes en 3D, etc.) pour lesquelles certains problèmes restent ouverts.

Références :

(1) T. BAYEN et J.-B. HIRIART-URRUTY, Objets convexes de largeur constante (en 2D) ou d'épaisseur constante (en 3D) : du neuf avec du vieux. ANNALES DES SCIENCES MATHÉMATIQUES DU QUÉBEC. Vol. 36, nř 1, 17-42 (2012).

Responsable : X. Dupuis

SUJET 6 . **Des machines à sous aux protocoles médicaux.**

Résumé : Parfois il faut savoir prendre des décisions importantes en l'absence d'information complète. Par exemple, le principe de l'essai clinique (dans sa forme la plus simple) consiste à chercher le meilleur traitement parmi K traitements possibles. Pour cela il y a N volontaires et la question est donc "Quel traitement donner à un patient sachant les effets observés sur les patients précédents ?" La stratégie du médecin sera alors un compromis entre exploration (essai des traitements peu testés afin d'estimer leur efficacité) et exploitation (tendance à privilégier le traitement qui a paru le plus efficace jusque-là). (extrait de Sciences & Avenir) Pour appréhender ce genre de situation, des stratégies aléatoires issues de l'univers des casinos et des machines à sous peuvent être appliquées. On essaiera de comprendre ces méthodes aléatoires et leur optimalité.

Références :

(1) Some aspects of the sequential design of experiments. H. Robbins.

Responsable : S. Hermann

SUJET 7 . **Une méthode de simulation de variables aléatoires basée sur les séries alternées.**

Résumé : Les méthodes de simulation de variables aléatoires les plus connues sont la méthode de rejet et la méthode de la fonction de répartition réciproque. Mais parfois ces deux méthodes ne permettent pas directement d'obtenir certaines lois de probabilités. Ce qui peut être plutôt gênant pour plusieurs lois de probabilités très présentes dans les études statistiques. Si la densité de probabilité de la variable aléatoire a une expression sous la forme d'une série de fonctions alors une méthode supplémentaire peut être considérée qui peut s'avérer très efficace numériquement. Ce projet permettra d'explorer la méthode de simulation basée sur les séries et de l'illustrer par des exemples.

Références :

(1) Devroye. Non-Uniform Random Variate Generation. 1986.

Responsable : S. Hermann

SUJET 8 . **Les nœuds en mathématiques.**

Résumé : Depuis les travaux de Kurt Reidemeister et James Alexander dans les années 1920, les nœuds — ceux de la vie de tous les jours, qui nous permettent de pratiquer la voile ou l'escalade sans (trop de) risque — sont devenus de véritables objets mathématiques. On cherche depuis à énumérer les nœuds sous forme de *tables* et à les distinguer à partir d'*invariants*, qui se construisent avec les outils de la topologie algébrique, de la géométrie ou encore de la physique théorique. Ce mémoire pourra s'orienter ou bien vers un exposé de vulgarisation, ou alors vers une introduction mathématique à la théorie des nœuds. Dans le premier cas, l'étudiant(e) lira [So] et s'intéressera surtout à l'historique de la théorie. Dans le second cas, elle/il privilégiera la lecture des premiers chapitres de [LD] avec pour objectif d'introduire le groupe fondamental comme invariant topologique des nœuds.

Références :

(1) J.–Y. Le Dimet, *Nœuds et tresses. Une introduction mathématique.* Éditions Vuibert, Paris, 2010.
(2) A. Sossinsky, *Nœuds. Genèse d'une théorie mathématique.* Éditions du Seuil, Paris, 1999.

Responsable : G. Massuyeau

SUJET 9 . **Grandes matrices aléatoires : autour du théorème de Wigner.**

Résumé : La théorie des grandes matrices aléatoires est née de ses applications. Elle est apparue au début du 20ème siècle dans le domaine des statistiques et a connue un nouveau dynamisme dans les années 50 par les travaux de Wigner en physique nucléaire. Depuis, la théorie s'est considérablement développée tant pour ses applications que pour ses multiples liens avec de nombreux problèmes mathématiques. L'objectif de ce mémoire est de comprendre le théorème de Wigner. Grossièrement, celui-ci stipule que la mesure spectrale – correctement renormalisée – de matrices aléatoires hermitiennes (à entrées i.i.d.) converge en loi vers la loi du demie-cercle lorsque la taille des matrices croit.

Références :

(1) D. Chafai et F. Malrieu, Recueil de modèles aléatoires (2016).
(2) D. Chafai, Journées X-UPS Introduction aux matrices aléatoires (2013).

Responsable : Y. Offret.

SUJET 10 . **Équations polynomiales et correspondance de Galois.**

Résumé : La théorie de Galois (qui porte le nom du célèbre mathématicien Évariste Galois mort à 20 ans à la suite d'un duel) est l'étude des extensions de corps par le biais d'une correspondance avec des groupes de transformations sur ces extensions, les groupes de Galois. Si l'étudiant choisit ce sujet pour un mémoire de vulgarisation, alors il s'agira d'étudier les différents aspects historiques de la résolution des équations polynomiales par radicaux et d'étudier quelques cas particuliers de la correspondance de Galois. Si l'étudiant choisit ce sujet pour un mémoire classique, alors il s'agira de comprendre la preuve du théorème fondamental de la théorie de Galois (la correspondance de Galois) et d'étudier des familles d'exemples. On pourra aussi envisager d'aborder le problème inverse de la théorie de Galois: *Tout groupe fini est-il groupe de Galois d'un extension de corps de* $\mathbb{Q}$*?*

Références :

(1) Jean-Pierre Escofier, Théorie de Galois.
(2) Jean-Pierre Serre, Topics in Galois Theory.

Responsable : R. Terpereau

Sujets Classiques

Les sujets suivants peuvent aussi bien être choisis par les étudiants de MA/PMG que de MEEF mais devrons faire l'objet d'un mémoire classique.

SUJET 11 . **La transformation de Weyl.**

Résumé : La transformation de Weyl est en quelque sorte une version non-commutative de la transformation de Fourier classique. Elle fut introduite par Hermann Weyl en 1928 dans sa formalisation mathématique de la mécanique quantique, créée quelques années auparavant par W. Heisenberg, E. Schrödinger, M. Born et d'autres.
Le but premier de ce projet est de familiariser l'étudiant(e) avec la transformation de Weyl sur des espaces fonctionnels classiques tels $L^1(\mathbb{R}^{2n})$, $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ et l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$.
Selon les centres d'intérêt de l'étudiant(e), une étude du produit de Moyal en relation avec la transformation de Weyl pourrait aussi être envisagée, ou bien, on pourrait aussi penser à l'étude de la représentation de Schrödinger du groupe de Heisenberg.

Prérequis : Analyse fonctionnelle (L3), Analyse 1 (M1) et, dans une moindre mesure, Analyse 2 (M1).

Références :

(1) Gerald B. Folland. *Harmonic analysis in phase space*, volume 122 of *Annals of Mathematics Studies.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.
(2) Michael Reed and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics I: Functional analysis.* Academic Press, Inc,, New York, second edition, 1980.
(3) M. W. Wong. *Weyl transforms.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 1998.

Responsable : G. Dito

SUJET 12 . **Topologie des courbes planes.**

Résumé : Une courbe plane X est l'ensemble des points de $\mathbb{C}^2$ (ou de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$) satisfaisant une équation polynomiale $F = 0$. Localement, une telle courbe est difféomorphe à un disque de $\mathbb{R}^2$, hormis en présence de points singuliers, c'est-à-dire de points où toutes les dérivées partielles de F s'annulent. On étudiera certains invariants algébriques (genre, groupe fondamental, etc) qui dépendent de la topologie de X. On pourra aussi étudier les invariants du plongement de X dans le plan, notamment concernant la topologie du complémentaire de X. On pourra regarder dans ce cadre des exemples de paires de Zariski, c'est-à-dire de couples X, X' ayant la même configuration de singularités mais pas la même topologie du complémentaire (courbes de degré 6 à 6 points de rebroussement se trouvant ou pas sur une conique).

Références :

(1) F. Kirwan "Complex algebraic curves", 1992.
(2) A. Libgober "Lectures on topology of complements and fundamental groups", 2005.

Responsable : D. Faenzi

SUJET 13 . **Algèbres de Lie libres.**

Résumé : Les algèbres de Lie libres sont des objets algébriques qu'on rencontre dans plusieurs domaines des mathématiques tels que, par exemple, la théorie des groupes ou encore la topologie des variétés. En effet, les algèbres de Lie libres y apparaissent naturellement comme “linéarisations” des groupes libres. L'objet du mémoire serait d'étudier la combinatoire des algèbres de Lie libres : notamment, l'étude de leurs bases linéaires (mots de Hall, mots de Lyndon) et le calcul de leurs dimensions en tous degrés (formule de Witt). Concrètement, il s'agirait de lire les premiers chapitres de (1). Éventuellement, l'étudiant(e) pourrait de façon autonome “expérimenter” le contenu théorique du mémoire à l'aide d'un logiciel de calcul formel auquel elle/il serait déjà habitué(e): par exemple le logiciel Mathematica avec le package *FreeLie.m* (2), ou le logiciel Axiom.

RÉFÉRENCES :

(1) C. Reutenauer, *Free Lie algebras.* London Mathematical Society Monographs. New Series, 7. Oxford Science Publications, 1993.
(2) D. Bar-Natan, package Mathematica *FreeLie.m*. Disponible à l'adresse `http://drorbn.net/AcademicPensieve/Projects/WKO4/`.

RESPONSABLE : G. Massuyeau

SUJET 14 . **Équations diophantiennes, théorème de Fermat et nombres p-adiques.**

RÉSUMÉ : Une équation diophantienne est une équation polynomiale dont les coefficients sont entiers. On étudie la question d'existence des solutions entières. Un exemple très connu est l'équation de Fermat : $x^n + y^n = z^n$. Si $n = 2$, toutes solutions sont données par les triangles de Pythagore. Par contre, si $n > 2$, il n'y a pas de solutions non triviales. Ce résultat très difficile a été conjecturé par P. Fermat en 1637 et démontré par A. Wiles en 1995. Ce mémoire consiste en deux parties : (1) Comprendre la démonstration du théorème de Fermat dans le cas $n = 3$ et $n = 4$, et démontrer le théorème analogue pour les polynômes ; (2) Étudier une méthode de résoudre des équations diophantiennes en utilisant les nombre p-adiques. Pour les équations homogènes de degré 2, le principe de Hasse donne une méthode pour déterminer l'existence des solutions.

RÉFÉRENCES :

(1) "p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions", N. Koblitz, GTM 58 Springer.
(2) `https://www.parabola.unsw.edu.au/files/articles/1990-1999/volume-35-1999/issue-1/vol35_no1_1.pdf`
(3) "A concise introudction to the theory of numbers", A. Baker, Cambridge University Press.

RESPONSABLE : L. Moser-Jauslin

SUJET 15 . **Étude des solutions de l'équation de la chaleur.**

RÉSUMÉ : On appelle *équation de la chaleur* linéaire l'équation aux dérivées partielles (EDP) parabolique, du premier ordre en temps t et du second ordre en espace $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\partial_t u(t,x) - \alpha \Delta u(t,x) = 0,$$

où $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j x_j}$ est l'opérateur laplacien en dimension n et α est un nombre réel positif donné.
L'équation de la chaleur, connue aussi sous le nom générique d'équation de diffusion, est très présente en physique. Par exemple, elle décrit l'évolution en temps de la température dans une région de l'espace-temps ou d'une substance chimique dans un liquide immobile contenu dans un tuyau droit. D'un point de vue mathématique, cette équation est le prototype des EDP parabolique du second ordre.
L'objet de ce mémoire est d'analyser les solutions explicites de cette équation et leurs propriétés. Par la suite, on généralisera certains de ces résultats aux EDP paraboliques.

RÉFÉRENCES :

(1) L.C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, AMS, 2010.
(2) W. A. Strauss. Partial differential equations. An introduction, John Wiley & Sons Inc., New York, 1992.

RESPONSABLE : S. Rota Nodari

SUJET 16 . **Théorie des codes correcteurs d'erreurs.**

RÉSUMÉ : Le but de la théorie des codes est la transmission d'informations (messages) par un canal de communication qui souffre de bruit, tel que le message envoyé arrive chez le destinataire avec des erreurs. On cherche à *encoder* l'information, côté émetteur, d'une telle façon que le récepteur peut détecter des erreurs (s'il n'y en a pas trop, bien sûr) et peut-être même les corriger. C'est évidemment possible: On pourrait tout simplement répéter chaque mot trois fois; si le bruit n'est pas trop fort, le récepteur écoutera trois mots, dont au moins deux identiques, qu'il supposera être le mot émis. La théorie mathématique des codes cherche à mettre des codes beaucoup plus élaborés et efficaces à disposition.

Les applications vont du quotidien (lecteurs de CD, connexions internet) aux images et données envoyées de sondes spatiales par canaux de communication très faibles. Le mémoire fera un sommaire des notions de base et étudiera quelques codes linéaires (pour lesquels codage, détection d'erreurs et décodage s'effectuent en utilisant des matrices sur un corps fini).

Références :

(1) J.-H. van-Lint: Introduction to coding theory.
(2) R. Hill: A first course in coding theory.
(3) R-J. McEliece et M. Kac: The theory of information and coding.

Responsable : P. Schauenburg.

SUJET 17 . **Demi-plan de Poincaré et groupes fuchsiens.**

Résumé : Le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ est un objet géométrique dont la définition est simple mais qui possède une structure très riche. En particulier, le groupe $SL_2(\mathbb{R})$ agit de manière transitive sur $\mathbb{H}$. Le but de ce mémoire est d'étudier l'action de ce groupe ou de certains de ses sous-groupes sur $\mathbb{H}$ et de voir en quoi ces actions peuvent être reliées à des questions de géométrie (dite hyperbolique), de topologie, d'arithmétique ou d'analyse complexe.

Références :

(1) Michèle Audin, Géométrie.
(2) Allen Hatcher, Topoloy of numbers (`https://www.math.cornell.edu/`)
(3) Svetlana Katok, Fuchsian groups.
(4) Caroline Series, Continued fractions and hyperbolic geometry (`http://homepages.warwick.ac.`)

Responsable : J. Taflin

SUJET 18 . **Opérateurs compacts, alternatives de Fredholm.**

Résumé : La majorité des espaces vectoriels qui apparaissent en analyse fonctionnelle sont de dimension infinie. L'étude des applications linéaires dans ce contexte est bien plus compliquée en général. Les opérateurs compacts forment une classe d'applications linéaires à la complexité intermédiaire. Sans se résumer au cas de dimension finie, ils en gardent plusieurs propriétés. Le but de ce mémoire est de débuter l'étude de ces opérateurs qui interviennent dans de nombreux contextes en analyse fonctionnelle.

Références :

(1) Haim Brezis, Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications.
(2) Francis Hirsch et Gilles Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle.

Responsable : J. Taflin

SUJET 19 . **Formes quadratiques et réseaux.**

Résumé : Les formes quadratiques sont des polynômes homogènes de degré 2 qui interviennent dans de nombreux domaines : classification des coniques, problèmes d'optimisation convexes, géométrie des surfaces, etc.
Le principal but de ce mémoire – à l'interface entre arithmétique, algèbre (bi)linéaire et analyse complexe – est de classifier les formes quadratiques sur le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ (sur $\mathbb{C}$ elles sont classifiées par le rang, et sur $\mathbb{R}$ elles sont classifiées par la signature). En cours de route, l'étudiant côtoiera entre autres la loi de réciprocité quadratique, les corps finis et p-adiques, le théorème des progressions arithmétiques de Dirichlet et les formes modulaires.

Références :

(1) Daniel Perrin, Cours d'algèbre.
(2) Jean-Pierre Serre, Cours d'arithmétique.

Responsable : R. Terpereau

SUJET 20 . **Introduction à la théorie analytique des nombres.**

Résumé : La *théorie des nombres* (aussi appelée arithmétique) est une branche des mathématiques qui s'occupe des propriétés des nombres: problèmes d'irrationalité et de transcendance, équations diophantiennes, fonctions arithmétiques, répartitions des nombres premiers, fractions continues, etc. La théorie *analytique* des nombres consiste à étudier des problèmes de la théorie des nombres via des méthodes d'analyse réelle ou complexe. L'un des sept problèmes du millénaire, l'hypothèse de Riemann, est un problème de la théorie analytique des nombres.
Le but de ce mémoire est de donner à l'étudiant un aperçu des idées et méthodes élémentaires de la théorie analytique des nombres. Pour ce travail de mémoire on attend de l'étudiant qu'il aille suffisamment loin dans la théorie pour être en mesure d'exposer la preuve (ou au moins une esquisse de preuve) du fameux *théorème des nombres premiers*:

$$\pi(x) := \{p \text{ premier } \mid p \leq x\} \sim \frac{x}{ln(x)} \text{ lorsque } x \to \infty.$$

Références :

(1) G. Tenenbaum, Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.

Responsable : R. Terpereau

SUJET 21 . **Revêtements et groupes fondamentaux : une introduction à la topologie algébrique.**

Résumé : La topologie algébrique, fondée en 1895-1904 par une série de travaux de Henri Poincaré, est aujourd'hui à la base de la géométrie, dans toutes ses formes : la fameuse conjecture de Poincaré (résolue en 2003 par Perelman) a été la propulsion principale pour l'avancement de la géométrie au XX siècle.
Dans ce projet, on propose de découvrir les bases de la topologie algébrique : groupes fondamentaux et revêtements. On essayera de mettre en évidence que des opérations entre des espaces topologiques correspondent à des opérations entre groupes.

Références :

(1) Henri Paul de Saint Gervais, Analysis Situs `http://analysis-situs.math.cnrs.fr/`
(2) Allen Hatcher, Algebraic Topology `https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf`

Responsable : M. Triestino

SUJET 22 . **L'espace des fonctions à variation bornée.**

Résumé : Ce sujet de mémoire concerne l'espace des fonctions à variation bornée, un espace fonctionnel central dans de nombreux domaines des mathématiques (contrôle optimal, segmentation et restoration d'image, études des surfaces minimales, EDPs, etc.). Étant donné une fonction $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$, on s'intéresse à l'énergie suivante

$$J(f) = \int_\Omega |\nabla f(x)| dx.$$

Afin de définir cette énergie, il est nécessaire de pouvoir définir le gradient ∇f de la fonction f et que celui-ci soit intégrable. On peut par exemple considérer une fonction $C^1(\Omega)$. Il s'agit toutefois d'une hypothèse très forte sur la fonction f. On définit la variation totale d'une fonction $f \in L^1(\Omega)$ comme la quantité

$$\mathrm{TV}(f) = \sup \left\{ - \int_\Omega u \,\mathrm{div}\phi \, dx : \phi \in C_c^\infty(\Omega), |\phi(x)| \leq 1 \, \forall x \in \Omega \right\},$$

et l'espace des fonctions à variation bornée $BV(\Omega)$ est le sous-espace de $L^1(\Omega)$ des fonctions f tels que $J(f) < +\infty$. Muni de la norme $\|f\|_{BV(\Omega)} = \mathrm{TV}(f) + \|f\|_{L^1(\Omega)}$, cet ensemble est un espace de Banach. Il s'agit d'une généralisation de l'énergie du gradient, dans le sens où si f est une fonction continuement différentiable, alors $\mathrm{TV}(f) = J(f)$.
L'objectif de ce mémoire est de produire un texte introductif à l'espace $BV(\Omega)$ et d'investiguer une de ses applications. Si la première période est cadré (étude des propriétés fondamentales de $BV(\Omega)$ comme le fait que ce soit un espace de Banach, la formule de la coaire ou encore le théorème de Federer-Volpert), la seconde est beaucoup plus libre. Par exemple, l'étudiant souhaitant explorer un lien entre géométrie et analyse pourra se consacrer au problème de minimisation de périmètre, alors que l'étudiant souhaitant considérer des applications au traitement d'images pourra travailler sur des problèmes de discrétisation et d'optimisation.

Prérequis : Analyse fonctionnelle (option L3 Dijon ou équivalent).

Références :

(1) Evans, L. C., Gariepy, R. F., Measure Theory and Fine Properties of Functions (Vol. 5). CRC Press, 1991.
(2) Ambrosio, L., Fusco, N., & Pallara, D., Functions of bounded variation and free discontinuity problems (Vol. 254), 2000. Oxford: Clarendon Press.

Responsable : S. Vaiter

SUJET 23 . **Représentation du groupe symétrique et tableaux de Young.**

Résumé : Le groupe symétrique est un objet central en mathématiques et son lien avec les polynômes symétriques jouent un rôle crucial dans divers branches des mathématiques. Dans ce mémoire on se propose d'étudier une approche combinatoire de cette théories à travers les polynômes de Schur et les tableaux de Young. On pourra par exemple s'intéresser à la règle de Littlewood-Richardson qui permet de comprendre comment se décompose le produit de deux représentations irréductibles du groupe symétrique.

Références :

(1) Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence. Laurent Manivel, Cours Spécialisés 3 (1998).
(2) Young Tableaux: With Applications to Representation Theory and Geometry, William Fulton, London Mathematical Society Student Texts.

Responsable : E. Wagner

SUJET 24 . **Polynômes de Jones et topologie des entrelacs.**

Résumé : Ce travail a pour but d'introduire la théorie mathématique des nœuds et des entrelacs à travers l'étude du premier invariant dit quantique à savoir le polynôme de Jones. Cet invariant est défini de manière combinatoire très simple en utilisant des relations locales sur les diagrammes d'entrelacs mais on verra dans ce mémoire que c'est un invariant très fin qui a permit de démontrer plusieurs conjectures très anciennes. On pourra aussi explorer des résultats plus récents visant à comprendre la topologie des entrelacs capturée par cet invariant.

Références :

(1) Le Dimet. Nœuds et tresses. Une introduction mathématique. Vuibert.
(2) Lickorish, W. B. Raymond. An introduction to knot theory. Graduate Texts in Mathematics, 175. Springer-Verlag, New York, 1997.
(3) Eisermann, Michael. The Jones polynomial of ribbon links. Geom. Topol. 13 (2009), no. 2, 623-660.

Responsable : E. Wagner